Dritter Artikel.

Über die Lösung der geometrischen Aufgaben mit dem Lineal und den linealen Instrumenten: Betrachtungen vom Standpunkte der projektiven Geometrie

von Amedeo Giacomini in Cuneo.

Zwei eng verbundene Ziele sind diesem Artikel gesetzt: die elementarsten Anwendungen des fruchtbaren Prinzips der Projektionen, als Methode zur Auflösung von Konstruktionsaufgaben verstanden, darzulegen, und die geometrischen Konstruktionen bei alleiniger Benutzung des Lineals, wobei, wenn es nötig ist, von einer auf dem Zeichenblatte gegebenen fundamentalen Figur (einem Parallelogramme, einem Quadrate, einem Kreise . . .) Gebrauch gemacht wird, systematisch zu entwickeln. Zum Schluß haben wir auch den wichtigsten Konstruktionen mit den linealen Instrumenten (dem Lineal mit zwei parallelen Kanten, dem rechten und dem schiefen Zeichenwinkel) eine kurze Notiz gewidmet.

Diese Entwickelungen sind mit den Anwendungen der projektiven Geometrie verknüpft, und wir werden daher von dieser einige Begriffe und Resultate in elementarster Form wiederholen; so werden wir z. B. das Doppelverhältnis, die harmonischen Gruppen, die projektiven Punktreihen und ihre Doppelpunkte in rascher Folge betrachten.

Die Resultate, die das Ziel unserer elementaren Auseinandersetzung bilden, sind in praktischer Hinsicht sehr bemerkenswert; sie beleuchten vor allem die linealen (deskriptiven und metrischen) Konstruktionen bei den Aufgaben ersten Grades, dann auch die Konstruktionen bei den Aufgaben zweiten Grades, bei denen das Lineal den Zirkel vollständig zu ersetzen vermag, wenn ein fundamentaler Kreis beschrieben ist; mit dem Lineal mit zwei parallelen Kanten und dem rechten und dem schiefen Zeichenwinkel kann man (bei geeigneter Anwendung) dieselben Konstruktionen ohne den festen Kreis ausführen. Man kommt daher zur Bildung eines Urteils über den

Wert der elementaren Instrumente, wenn auch dieses Urteil sich in den verschiedenen Fällen auf die Behauptung beschränkt, daß man „mit einem Instrumente die Konstruktionen ausführen kann, die durch ein anderes Instrument gegeben sind", und das Urteil über die „Unmöglichkeit, gewisse Aufgaben mit gewissen Instrumenten zu lösen", der analytischen Geometrie und der Algebra (Art. IV, V) überlassen wird.

Dafür ist die projektive Geometrie dem analytischen Verfahren bei der Belehrung über die wirklich einfachsten Konstruktionen überlegen, und sie bietet eine lehrreiche Methode für deren Aufsuchung dar. Wir haben uns speziell bei einer besonderen Anwendungsart der projektiven Methode aufgehalten, an die eine elegante Lösung verschiedener klassischer Aufgaben (der Schnittaufgaben des Apollonius und der Aufgabe des Giordano d'Ottaiano) anknüpft.

Mancher Leser, der mit den Begriffen der projektiven Geometrie vertraut ist, könnte wünschen, daß die Darstellung von einem höheren Standpunkte aus beleuchtet werden möchte. Diese Forderung, die mit dem angestrebten elementaren Charakter unserer Schrift im Widerspruch steht, kann nicht erfüllt werden; aber einige kritische Bemerkungen (und im besonderen diejenigen, welche wir unter dieser Überschrift in einem besonderen Paragraphen zusammengefaßt haben) werden einem solchen Leser die Möglichkeit geben, die hier auseinandergesetzten Resultate mit den abstraktesten Begriffen der modernen Geometrie in Verbindung zu bringen, indem sie z. B. bei der Betrachtung der metrischen Aufgaben auf den Zusammenhang mit der absoluten Involution der Ebene hinweisen.

An Stelle breiterer historischer Notizen geben wir das folgende Verzeichnis der wichtigsten Werke über unseren Gegenstand, die wir für diesen Aufsatz benutzt haben:

J. H. Lambert, *Freie Perspektive usw.*, Zürich 1759, 2. Aufl. 1774. — Servois, *Solutions peu connues de différents problèmes de géométrie pratique*, Paris 1805. — Ch. J. Brianchon, *Applications de la théorie des transversales*, Paris 1818. — J. V. Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures*, Metz et Paris 1822. — J. Steiner, *Die geometrischen Constructionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und Eines festen Kreises*, Berlin 1833, Ges. Werke I, pg. 461, Berlin 1881, Ostwalds Klassiker Nr. 60, Leipzig 1895. — J. Frischauf, *Die geometrischen Constructionen von L. Mascheroni und J. Steiner*, Graz 1869. — L. Cremona, *Elementi di geometria proiettiva*, Torino 1873, deutsch von Fr. R. Trautvetter, Stuttgart 1882 — H. Hankel, *Die Elemente der projectivischen Geometrie*, Leipzig 1875. — A. Adler, *Über die zur Ausführung geometrischer Konstruktionsaufgaben zweiten Grades*

nothwendigen Hilfsmittel, Wien. Ber. 99 (1890). — G. de Longchamps, *Géométrie de la règle et de l'équerre,* Paris 1890. — F. Klein, *Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie,* Leipzig 1895. — F. Enriques, *Lezioni di geometria proiettiva,* Bologna 1898, deutsch von H. Fleischer, Leipzig 1903. — F. Severi, *Sui problemi determinati risolubili colla riga e col compasso,* Palermo Circ. mat. Rend. 18 (1904).

§ 1. Projektionen; deskriptive und metrische Eigenschaften. Wir gehen von folgender fundamentaler Betrachtung aus: Wenn man eine ebene Figur F von irgend einem außerhalb der Ebene befindlichen Punkte (dem Zentrum) aus auf irgend eine andere, nicht durch ihn gehende Ebene projiziert, so erhält man eine Figur F', die mit F gewisse Eigenschaften (die projektiven Eigenschaften) gemeinsam hat.

Will man die Eigenschaften, die in dem genannten Sinne projektiven Charakter haben, analysieren, so sind vor allem zwei Klassen geometrischer Beziehungen zu unterscheiden:

1. die deskriptiven Beziehungen, in denen das Einanderangehören von Punkten und Linien und im besondern von Punkten und Geraden, das Aufeinanderfolgen mehrerer Punkte auf einer Geraden usw. betrachtet wird;

2. die metrischen Beziehungen, in denen es sich um die Größe (oder das Maß) von Strecken oder Winkeln (um die Gleichheit und Proportionalität, Orthogonalität von Geraden usw.) handelt.

Die deskriptiven Eigenschaften sind projektiv, wofern man die Verabredung trifft, zwei parallele Gerade als solche anzusehen, die sich in einem uneigentlichen Punkte (im Unendlichen) schneiden, und zwei parallele Ebenen als solche, die sich in einer uneigentlichen Geraden, die alle ihre uneigentlichen Punkte enthält, schneiden. Diese Verabredung führt zu einer Modifikation der gewöhnlichen Anschauung der Geraden, die nun (in Übereinstimmung mit dem Euklidischen Parallelenpostulat) als eine in ihrem uneigentlichen Punkte geschlossene Linie aufgefaßt wird.[1]) Der Parallelismus zweier Geraden muß also als eine metrische Beziehung betrachtet werden, die ein Urteil über die (Unendlichkeit der) Entfernung ihres gemeinsamen Punktes enthält.

Die metrischen Eigenschaften werden im allgemeinen durch eine Projektion der Figur geändert. Es gibt jedoch

1) Vgl. z. B. die oben angeführten Vorlesungen über projektive Geometrie von F. Enriques.

einige projektive metrische Beziehungen, von denen wir bald sprechen werden.

Das Prinzip der Projektionen kann man (mit Poncelet) als eine Methode für die Verallgemeinerung und die Entdeckung betrachten, und gerade seine Nützlichkeit bei der Lösung von Aufgaben wollen wir beleuchten.

Die Anwendung, die wir von ihm machen werden, wird sich häufig der beiden folgenden Sätze bedienen, die unmittelbar klar sind:

Man kann zwei sich schneidende Gerade immer in zwei parallele Gerade projizieren (d. h. man kann eine ebene Figur so projizieren, daß einer ihrer eigentlichen Punkte in einen uneigentlichen Punkt übergeht).

Man kann auch zwei Paare sich schneidender Geraden in zwei Paare paralleler Geraden projizieren (d. h. man kann eine ebene Figur so projizieren, daß eine ihrer eigentlichen Geraden in eine uneigentliche Gerade übergeht).

§ 2. Einleitende Betrachtungen über die mit dem Lineal lösbaren Aufgaben. Wir nehmen uns vor, die Lösung der Konstruktionsaufgaben zu suchen, indem wir, soweit es möglich ist, nur das Lineal benutzen. Vor allem ist zu bemerken, daß die durch dieses Instrument gegebene fundamentale Konstruktion der Verbindung zweier Punkte uns nur das Mittel gibt, die deskriptive Beziehung des Einanderangehörens zwischen Punkten und Geraden zu verifizieren und auszudrücken. Also müssen die allein mit dem Lineal lösbaren Aufgaben sich so fassen lassen, daß unbekannte Elemente gesucht werden, die zu den gegebenen Elementen nur in deskriptiven Beziehungen stehen.

Die elementarsten metrischen Aufgaben sind nicht von dieser Art; es ist z. B. unmöglich, den Parallelismus oder die Orthogonalität zweier Geraden, die Gleichheit zweier Strecken usw. als eine deskriptive Beziehung auszudrücken, da sonst diese Beziehungen bei einer Projektion ungeändert bleiben müßten (vgl. Art. IV).

Es kommt jedoch vor, daß gewisse metrische Beziehungen sich in deskriptive Beziehungen verwandeln, wenn es sich nämlich um Beziehungen zu gegebenen Elementen handelt, die schon irgend einer vorher festgesetzten metrischen Bedingung genügen; so ist es z. B. dasselbe zu sagen „eine Gerade c soll zu zwei untereinander parallelen Geraden a und b parallel sein“ oder zu sagen „c soll durch den (uneigentlichen) Punkt gehen, der den beiden gegebenen Geraden gemeinsam ist“.

In diesem Sinne bieten sich also neben den eigentlichen de-

skriptiven Aufgaben auch metrische Aufgaben dar, die mit dem Lineal lösbar sind. Die Methode der Projektionen wird uns lehren, welche Beziehung zwischen den einen und den andern stattfindet.

§ 3. Die Sätze von Desargues und Pappus und die linealen deskriptiven Aufgaben. Die mit dem Lineal lösbaren elementaren deskriptiven Aufgaben kommen im wesentlichen darauf hinaus, den Schnittpunkt zweier gegebener Geraden zu bestimmen und zwei gegebene Punkte durch eine Gerade zu verbinden. Diese beiden ebenso einfachen wie wichtigen fundamentalen Konstruktionen würden zu keiner bemerkenswerten Betrachtung Veranlassung geben, wenn wir sie nicht besonders vom Standpunkte der Praxis aus betrachten wollten. Wir bemerken in der Tat, daß manchmal die als gegeben betrachteten Punkte und Geraden nicht auf dem Blatte der Zeichnung vorhanden sind, aber doch durch andere Elemente, die auf dem Blatte vorhanden sind, angegeben sein können; so kann ein Punkt außerhalb des Blattes als Schnittpunkt zweier Geraden, von denen ein Teil sich auf dem Blatte befindet, angegeben sein, und eine Gerade kann durch zwei ihrer Punkte gegeben sein, von denen einer oder beide außerhalb des Blattes liegen und in der erwähnten Weise angegeben sind.

In diesen Fällen kann man zur Lösung aller deskriptiven Aufgaben ersten Grades mit Hilfe des folgenden Satzes von den homologen Dreiecken von Desargues gelangen:

Wenn zwei Dreiecke ohne gemeinsame Elemente (Seiten oder Eckpunkte) mit ihren Seiten und Eckpunkten aufeinander bezogen sind und wenn die Paare homologer Seiten sich in drei Punkten schneiden, die einer und derselben Geraden angehören, so gehen die drei Verbindungslinien homologer Eckpunkte durch einen und denselben Punkt; und umgekehrt, wenn die drei Verbindungslinien homologer Eckpunkte durch einen und denselben Punkt (das Homologiezentrum) gehen, so schneiden sich die homologen Seiten in drei Punkten einer und derselben Geraden (der Homologieachse).

Als besondere Fälle dieses Satzes sind diejenigen zu betrachten, in denen zwei homologe Seiten der beiden Dreiecke parallel der Verbindungslinie der Schnittpunkte der beiden andern Paare sind, oder die homologen Seiten parallel sind, oder die Verbindungslinien homologer Eckpunkte parallel sind.

Zum Beweise des Satzes wenden wir unsere Aufmerksamkeit dem besonderen Falle zweier (homothetischer) Dreiecke mit parallelen

Seiten zu. In diesem Falle ist die Tatsache, daß die Verbindungslinien entsprechender Eckpunkte durch einen (eigentlichen oder uneigentlichen) Punkt gehen, eine Folge der elementaren Eigenschaften der Proportionen (vgl. Bd. I, Art. Proportionen). Nun kann eine ebene Figur, die aus zwei Dreiecken von der Eigenschaft besteht, daß die Paare entsprechender Seiten sich in Punkten einer und derselben Geraden r schneiden, immer als Projektion einer Figur aufgefaßt werden, die aus zwei homothetischen Dreiecken besteht, nämlich aus denjenigen Dreiecken, die man erhalten würde, wenn man die gegebenen Dreiecke von einem willkürlichen Punkte P aus auf eine zu der Ebene Pr parallele Ebene projizierte. Und da es sich um eine deskriptive Eigenschaft handelt, die also projektiven Charakter hat, so ist der Satz auf diese Weise bewiesen.

Seine Umkehrung bietet keine Schwierigkeiten dar.

Mit Hilfe des Desarguesschen Satzes werden wir die Lösung der vier einfachsten Aufgaben, die sich darbieten können, hier auseinandersetzen, nämlich die Lösung der folgenden Aufgaben: es sind zwei Punkte durch eine Gerade zu verbinden, wenn einer von ihnen oder beide außerhalb des Blattes als Schnitte von gezeichneten Geradenpaaren angegeben sind; es ist der gemeinsame Punkt zweier Geraden zu bestimmen, wenn eine von ihnen oder beide durch Paare von Punkten außerhalb des Blattes gegeben sind, die ihrerseits als Schnitte von gezeichneten Geradenpaaren angegeben sind.

1. Es ist eine Gerade durch zwei Punkte zu legen, von denen einer außerhalb des Blattes gegeben ist (Fig. 31). Es seien P und (aa') die beiden gegebenen Punkte. Man ziehe durch P zwei beliebige Gerade b und b' und durch einen Punkt S, den man auf der Verbindungslinie von (ab) und $(a'b')$ beliebig wählt, zwei beliebige Gerade p und q; dadurch erhält man z. B. die beiden homologen Dreiecke abc und $a'b'c'$.

Ihre in der Zeichnung durch die Punkte (cc') und $(bb') \equiv P$ bestimmte Homologieachse wird die verlangte Gerade sein.

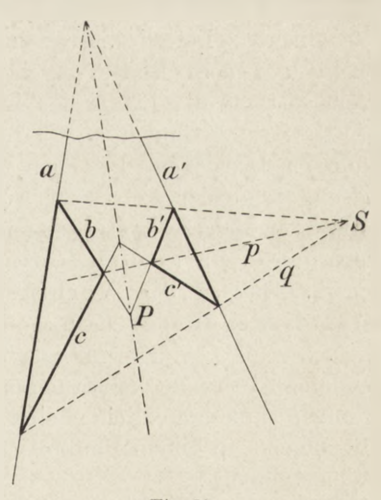


Fig. 31.

Es kann bequem sein, zur Geraden p die Gerade zu nehmen, welche die Punkte (ab') und $(a'b)$ verbindet; in diesem Falle werden

nur die Geraden b, b' und q in willkürlicher Weise gezogen, und die Konstruktion erhält das Aussehen der Figur 32.

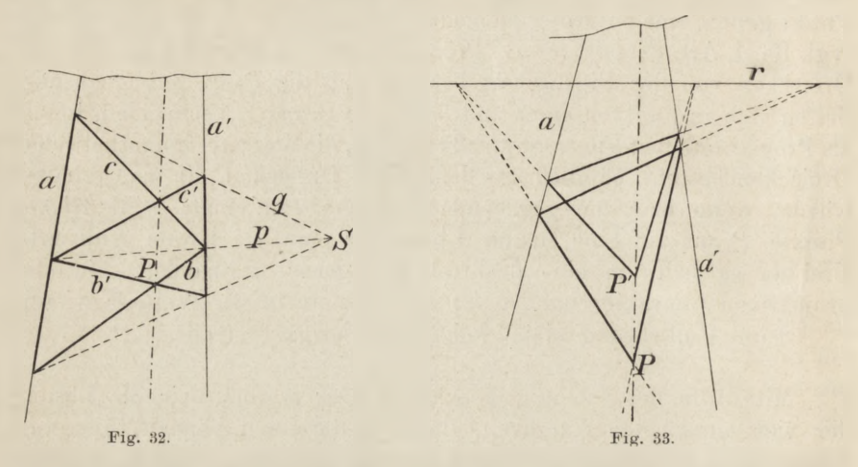


Fig. 32. Fig. 33.

Eine andere, gleichfalls auf den Desarguesschen Satz gegründete Lösung derselben Aufgabe besteht darin, eine Homologieachse r anzunehmen (Fig. 33) und ein Dreieck zu konstruieren, von dem ein Eckpunkt sich in P befindet und die beiden andern auf a und a' liegen; jedes andere dem ersten homologe Dreieck bestimmt dann die verlangte Gerade als die Verbindungslinie der homologen Eckpunkte P und P'.

Offenbar liefern diese Konstruktionen auch die Verbindungslinie zweier auf dem Blatte gegebener Punkte, wenn deren Entfernung größer ist als die Länge des Lineals, das man zur Verfügung hat.

Übrigens können wir auf Grund desselben Satzes von den homologen Dreiecken die eben angeführten Konstruktionen auch zur Lösung folgender metrischer Aufgabe benutzen: Es ist durch einen auf dem Blatte gegebenen Punkt P die Parallele zu zwei gegebenen parallelen Geraden a und a' zu ziehen.

2. Es ist die Verbindungslinie zweier außerhalb des Blattes gegebener Punkte zu ziehen. Es seien (aa') und (bb') (Fig. 34) die beiden gegebenen Punkte. Jedesmal wenn man zwei homologe Dreiecke konstruieren kann, von denen a und a' und auch b und b' homologe Seiten sind, werden die beiden dritten Seiten im allgemeinen in einem Punkte zusammentreffen, der der verlangten Geraden angehört.

Auf der Verbindungslinie der Eckpunkte (ab) und $(a'b')$ wähle man einen beliebigen Punkt S als Zentrum der Homologie und ziehe durch S zwei beliebige Gerade p und q. Dadurch erhält man z. B.

die homologen Dreiecke abc und $a'b'c'$ und damit den Punkt (cc'), der der verlangten Geraden angehört; andererseits erhält man auch die homologen Dreiecke abd und $a'b'd'$ und damit einen Punkt (dd') jener Geraden. Diese ist also die Verbindungslinie der Punkte (cc') und (dd').

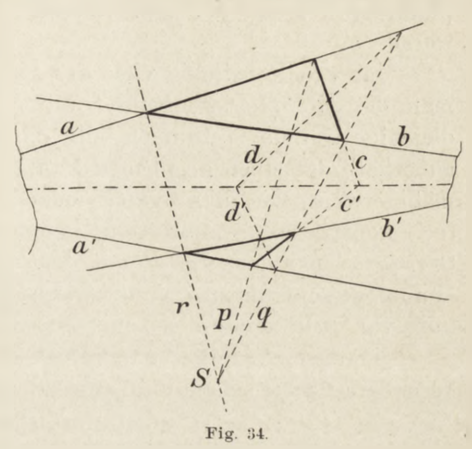


Fig. 34.

Diese Linie kann vollständig außerhalb des Blattes fallen; in diesem Falle werden wir lernen, ihren Schnittpunkt mit einer Geraden des Blattes zu bestimmen (Aufgabe 3).

Inzwischen verzeichnen wir noch, daß der besondere metrische Fall hier miterledigt ist: Es sind zwei parallele Gerade a und a' und ein Punkt (bb') außerhalb des Blattes gegeben, man soll durch diesen Punkt die Parallele zu jenen ziehen.

3. Es ist eine Gerade auf dem Blatte und eine Gerade außerhalb des Blattes gegeben: man soll ihren Schnittpunkt mit Hilfe einer durch ihn hindurchgehenden, auf dem Blatte liegenden Geraden bestimmen.

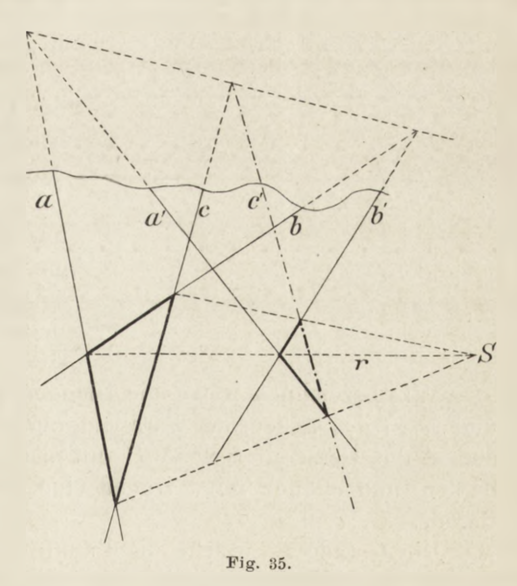


Fig. 35.

Es seien (aa') und (bb') die Punkte, die die außerhalb des Blattes gegebene Gerade bestimmen (Fig. 35), und c sei die auf dem Blatte gegebene Gerade. Man wird auch hier nur ein Paar homologer Dreiecke abc und $a'b'c'$ zu konstruieren haben; die dritte unbekannte Seite c' wird die verlangte Gerade sein.

Auf der Geraden r, die die Ecken (ab) und $(a'b')$ verbindet, wähle

man ein Homologiezentrum S; die von S nach den Punkten (ac) und (bc) gezogenen Strahlen bestimmen auf den Seiten a' und b' die Eckpunkte $(a'c')$ und $(b'c')$, und deren Verbindungslinie ist die verlangte Gerade c'.

Man erhält beliebig viele der Aufgabe entsprechende Gerade, wenn man das Homologiezentrum S auf r variieren läßt. Und wenn man diejenige Gerade bestimmen will, die durch einen auf dem Blatte oder außerhalb desselben gegebenen Punkt P geht, so wird man sie zweckmäßigerweise wie in Aufgabe 1 oder 2 als Verbindungslinie von P mit (cc') konstruieren; andrerseits kann man auch an Stelle von a' die Gerade a'' nehmen, die P mit dem Punkte (aa') verbindet, und zum Homologiezentrum den Punkt wählen, in dem sich r, die Verbindungslinie von (ab) und $(a''b')$, mit der Geraden $P(ac)$ schneidet.

Die auseinandergesetzte Konstruktion läßt sich offenbar auf den besonderen metrischen Fall anwenden: Es sind auf dem Zeichenblatte zwei Paare paralleler Geraden a, a' und b, b' gegeben; man soll durch einen, auf dem Blatte oder außerhalb des Blattes gegebenen, Punkt P die Parallele zu einer beliebigen, auf dem Blatte gegebenen Geraden c ziehen (Fig. 36); diese Aufgabe wird auf eine der beiden oben angeführten besonderen Aufgaben zurückzuführen sein.

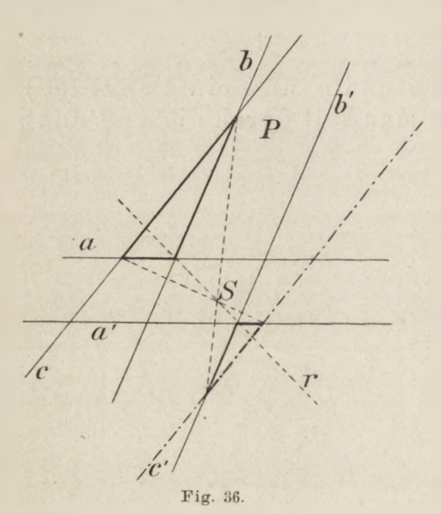


Fig. 36.

Jedoch halten wir es nicht für unangebracht, hier eine andere elegante Lösung dieser Aufgabe auseinanderzusetzen[1]), die im wesentlichen auch in einer Anwendung des Desarguesschen Satzes besteht.

Wir bezeichnen mit d die Diagonale, welche die Eckpunkte (ab') und $(a'b)$ des gegebenen Parallelogramms verbindet (Fig. 37), mit s und s' die Geraden, welche P mit den Punkten (bc) und $(b'c)$ verbinden, und endlich mit t irgend eine durch den Punkt (dc) gehende Gerade.

Die Gerade r, welche die Punkte (ac) und (ts') verbindet, wird die Gerade r', welche die Punkte $(a'c)$ und (ts) verbindet, in einem

1) J. H. Lambert, *Freie Perspektive usw.*, Zürich 1759, 2. Aufl. 1774.

Punkte Q schneiden, der mit P auf einer und derselben Parallelen zu c liegt.

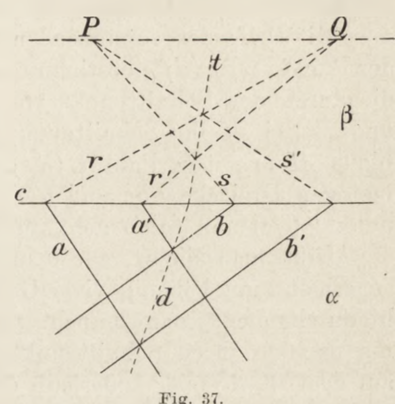


Fig. 37.

In der Tat, man betrachte c als die Schnittlinie zweier Ebenen, von denen die eine, α, die gegebenen Geraden a, a', b, b' und die andere, β, die Geraden r, r', s, s' enthält; man wird zunächst erkennen, daß die beiden Ebenen (ar) und $(a'r')$ sich in einer durch Q gehenden und der Ebene α parallelen Geraden q schneiden und daß in analoger Weise die Ebenen (bs) und $(b's')$ sich in einer durch P gehenden und der Ebene α parallelen Geraden p schneiden.

Nun haben die beiden Paare homologer Dreiecke abd, rst und $a'b'd$, $r's't$ ein gemeinsames Homologiezentrum S, das auf den vier Ebenen (ar), $(a'r')$, (bs), $(b's')$ liegen muß und daher gleichzeitig auf den Geraden p und q liegt. Diese beiden Geraden befinden sich also in einer und derselben Ebene, und diese ist zu α parallel; daher ist auch PQ der gegebenen Geraden c parallel.

4. Es sind zwei Gerade außerhalb des Blattes gegeben; es soll ihr Schnittpunkt mit Hilfe zweier durch ihn hindurchgehender Geraden des Blattes bestimmt werden. Es seien (ab) und $(a'b')$ die beiden Punkte, welche die erste Gerade r angeben (Fig. 38), und (ef) und $(e'f')$ die (in der Figur nicht gezeichneten) Punkte, welche die zweite Gerade s angeben. Es empfiehlt sich hier, den Schnittpunkt der beiden gegebenen Geraden als das Homologiezentrum zweier homologer Dreiecke zu betrachten. Wenn a, b zwei Seiten des einen dieser Dreiecke sind und a', b'

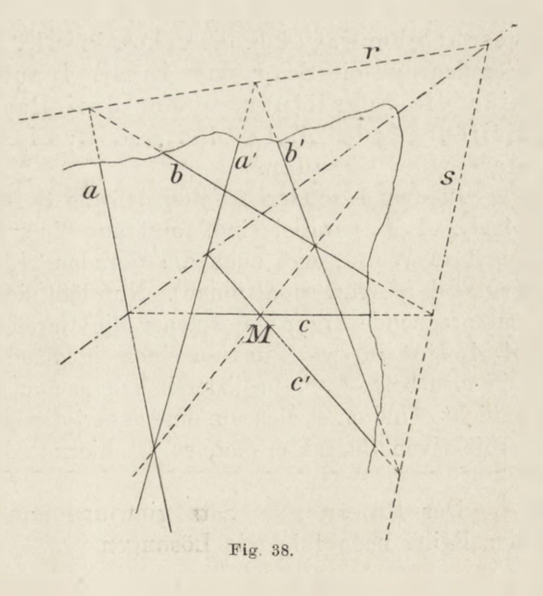


Fig. 38.

die homologen des andern, so ist die Homologieachse die Gerade, welche durch die Punkte (aa') und (bb') geht.

Mit Hilfe der vorstehenden Konstruktionen und unter Benutzung der Punkte (ef), $(e'f')$ bestimme man nun irgend eine Gerade des Blattes, die durch den Schnittpunkt von b und s geht; es sei c diese Gerade, und es sei M ihr Schnittpunkt mit der Homologieachse. Man verbinde M mit dem Punkte $(b's)$. Dadurch erhält man die beiden homologen Dreiecke abc und $a'b'c'$, und die Verbindungslinie der Eckpunkte (ac) und $(a'c')$ geht durch das Zentrum der Homologie.

Läßt man die Gerade c und daher auch die Gerade c' variieren, so erhält man beliebig viele Gerade, die durch den verlangten Punkt hindurchgehen; man braucht nur irgend zwei davon zu bestimmen, um nachher ihren Schnittpunkt, nämlich den Punkt (rs), mit einem auf dem Blatte oder außerhalb desselben willkürlich gegebenen Punkte verbinden zu können.

Wir verzeichnen auch hier den besonderen metrischen Fall: Es sind zwei Paare paralleler Geraden a, b und a', b' gegeben; man soll durch einen, auf dem Blatte oder außerhalb desselben gegebenen, Punkt P die Parallele zu einer außerhalb des Blattes gegebenen Geraden ziehen.

Die vier vorstehenden fundamentalen Aufgaben können auch gelöst werden, indem man den folgenden Satz (von Pappus) anwendet: Wenn ein Sechseck $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ in ein Geradenpaar einbeschrieben ist (d. h. die Eckpunkte A_1, A_3, A_5 liegen auf der einen Geraden und die Eckpunkte A_2, A_4, A_6 auf der andern), so befinden sich die Schnittpunkte der drei Paare gegenüberliegender Seiten: A_1A_2, A_4A_5; A_2A_3, A_5A_6; A_3A_4, A_6A_1 auf einer und derselben Geraden.

In dem besonderen Falle, daß die Geradenpaare A_1A_2, A_4A_5 und A_2A_3, A_5A_6 parallel sind, folgt aus einer Streckenproportion auf elementare Weise, daß auch die Geraden A_3A_4 und A_6A_1 parallel sind (vgl. Bd. I, Art. Proportionen). Nun läßt sich die dem allgemeinen Falle entsprechende Figur, in welcher die Geraden A_1A_2, A_4A_5 und A_2A_3, A_5A_6 sich in zwei Punkten einer eigentlichen Geraden r schneiden, in die eben betrachtete projizieren, indem man die Gerade r ins Unendliche schickt. Und da es sich um eine deskriptive Eigenschaft handelt, die also projektiven Charakter hat, so ist hiermit der Satz allgemein bewiesen.

Der Pappussche Satz gibt uns nun für unsere vier Aufgaben der Reihe nach folgende Lösungen

1. Es sind der Punkt R und die Geraden a, b auf dem Zeichenblatte gegeben; es handelt sich darum, R mit dem (unerreichbaren) gemeinsamen Punkte P der Geraden a, b zu verbinden (Fig. 39). Wir ziehen zwei beliebige Gerade r und s und bezeichnen mit den Buchstaben A_2, A_4, A_1, A_5 die Punkte (ar), (br), (as), (bs); wir verbinden dann den Punkt R mit A_1 und A_4 und vervollständigen das den Geraden r, s eingeschriebene Sechseck $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$. Nach dem ausgesprochenen Satze wird die Gerade, welche die Punkte $R \equiv (A_3 A_4, A_6 A_1)$ und $Q \equiv (A_2 A_3, A_5 A_6)$ verbindet, durch den Punkt $P \equiv (a, b) \equiv (A_1 A_2, A_4 A_5)$ gehen.

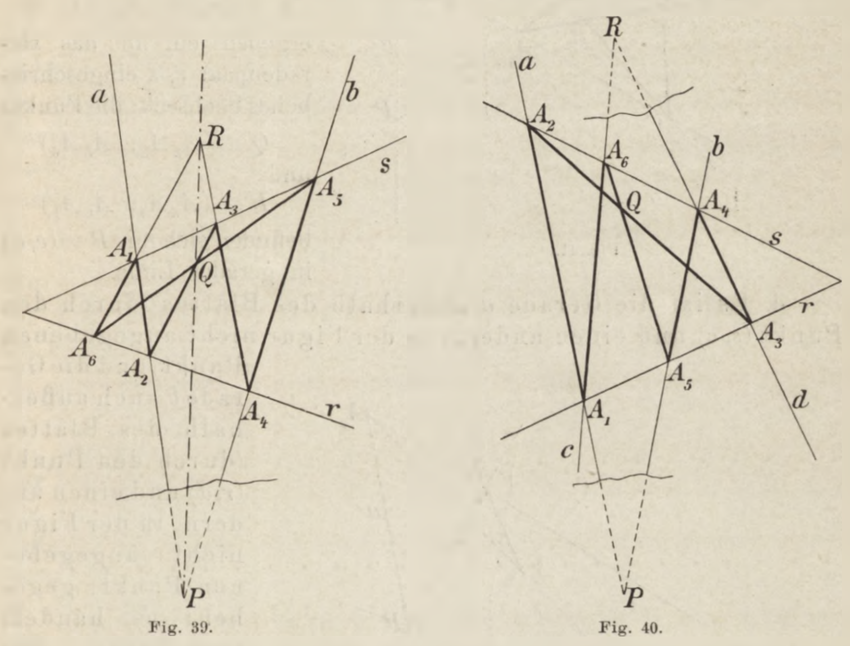


Fig. 39. Fig. 40.

2. Es sind die Geradenpaare a, b und c, d gegeben; es handelt sich darum, die Verbindungslinie der beiden (unerreichbaren) Punkte $P \equiv (a, b)$ und $R \equiv (c, d)$ zu ziehen (Fig. 40). Man ziehe eine beliebige Gerade r durch den Punkt $A_1 \equiv (a, c)$ und eine andere Gerade s durch den Punkt $A_4 \equiv (b, d)$ und bestimme das dem Geradenpaare r, s eingeschriebene Sechseck $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$; der Punkt $Q \equiv (A_2 A_3, A_5 A_6)$ befindet sich mit P und R auf einer geraden Linie. In analoger Weise findet man einen andern Punkt Q', der auch mit P und R auf einer Geraden liegt, und daher kann man die Gerade $QQ' \equiv PR$ ziehen.

3. Es ist die Gerade c auf dem Zeichenblatte und die Gerade d außerhalb des Blattes (durch die Punkte (r, a) und (s, b)) gegeben; es handelt sich darum, eine Gerade zu bestimmen, die durch $P \equiv (c, d)$ geht (Fig. 41). Die sechs Punkte

$$A_1 \equiv (r, a), \quad A_2 \equiv (s, b),$$
$$A_3 \equiv (r, b), \quad A_4 \equiv (s, c),$$
$$A_5 \equiv (r, c), \quad A_6 \equiv (s, a)$$

ergeben ein in das Geradenpaar r, s eingeschriebenes Sechseck; die Punkte

$$Q \equiv (A_2 A_3, \ A_5 A_6)$$

und

$$R \equiv (A_3 A_4, \ A_6 A_1)$$

befinden sich mit $P \equiv (c, d)$ in gerader Linie.

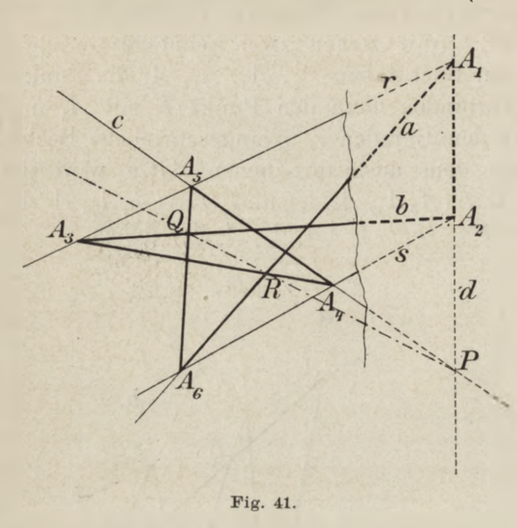


Fig. 41.

4. Es ist die Gerade a außerhalb des Blattes (durch den Punkt (s, c) und einen andern, in der Figur nicht angegebenen Punkt) und die Gerade b auch außerhalb des Blattes (durch den Punkt (r, d) und einen andern, in der Figur nicht angegebenen Punkt) gegeben; es handelt sich darum, den Punkt $P \equiv (a, b)$ durch Gerade, die durch ihn hindurchgehen, zu bestimmen (Fig. 42). Mit Hilfe der vorstehenden Aufgaben kann man immer denjenigen Teil des Sechsecks $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$ konstruieren, der sich auf dem Zeichenblatte befindet, und dann ergeben die Punkte

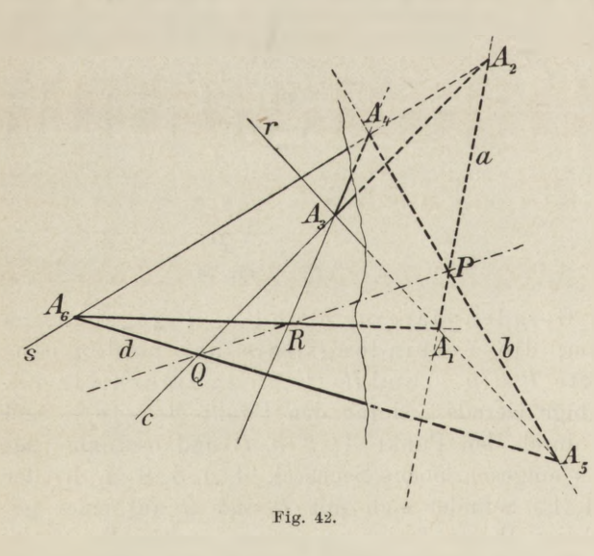


Fig. 42.

$Q \equiv (A_2 A_3, A_5 A_6)$ und $R \equiv (A_3 A_4, A_6 A_1)$ eine durch $P \equiv (a, b)$ hindurchgehende Gerade. In analoger Weise kann man eine andere solche Gerade erhalten, und daher ist der Punkt P bestimmt.

§ 4. Projektiver Charakter des Doppelverhältnisses von vier Punkten einer Geraden. Unter den oben gelösten Aufgaben befand sich bereits die Konstruktion der Parallelen durch einen Punkt zu einem Paare gegebener paralleler Geraden. Andere und bemerkenswertere Anwendungen der Methode der Projektionen auf metrische Aufgaben gründen sich auf die Kenntnis einiger metrischer Relationen von projektivem Charakter. Die einfachste dieser Relationen erhalten wir, wenn wir das Doppelverhältnis (oder anharmonische Verhältnis) von vier Punkten einer Geraden betrachten. Es besteht in der Tat der Satz: Wenn man vier Punkte A, B, C, D einer Geraden von einem Punkte O aus in die Punkte A', B', C', D' einer anderen Geraden projiziert, dann sind die Doppelverhältnisse

$$(ABCD) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}, \quad (A'B'C'D') = \frac{A'C'}{B'C'} : \frac{A'D'}{B'D'}$$

gleich.

Um diesen Satz zu beweisen, ziehen wir durch A und B (Fig. 43) die Parallelen zu der Geraden $A'D'$; dann ergibt sich unmittelbar:

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{AN}{BR} : \frac{AP}{BS} = \frac{AN}{MN} : \frac{AP}{MP} = \frac{A'C'}{B'C'} : \frac{A'D'}{B'D'}.$$

Schneidet man also die vier Strahlen a, b, c, d, die von dem Punkte O aus die Punkte A, B, C, D projizieren, mit einer Geraden, so ist das Doppelverhältnis der vier Punkte, die man erhält, in einer gewissen Reihenfolge genommen, dem Doppelverhältnis der in derselben Reihenfolge genommenen gegebenen Punkte immer gleich; es heißt auch das Doppelverhältnis $(abcd)$ der vier Strahlen a, b, c, d.[1] Wir schließen also, daß das Doppelverhältnis

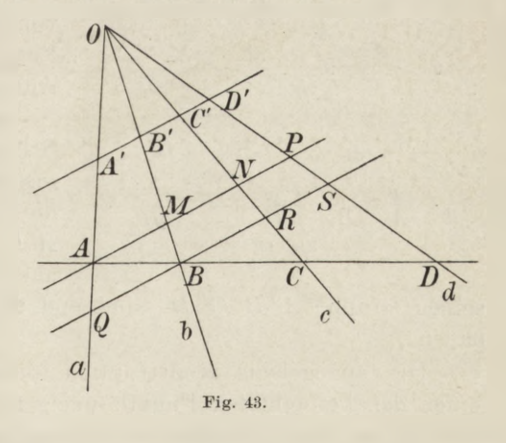


Fig. 43.

[1] Für das Folgende sei bemerkt, daß „wenn zwei Quadrupel von Strahlen zu je zweien gleiche Winkel bilden, ihre Doppelverhältnisse gleich sind“.

von vier Punkten einer Geraden bei jeder beliebigen Anzahl von Projektionen und Schnitten ungeändert bleibt.

Dieser Satz besteht ohne Ausnahme, wenn man dahin übereinkommt, daß „das Doppelverhältnis von vier Punkten $(ABCD)$ sich auf das einfache Verhältnis $\frac{AC}{BC}$ reduziert, wenn D der unendlich ferne Punkt der Geraden ist“, und wenn die analogen Verabredungen für die Fälle, daß C oder B oder A sich im Unendlichen befinden, getroffen werden, in Übereinstimmung mit dem, was man aus Gründen der Kontinuität tun würde.

Infolge des projektiven Charakters des Doppelverhältnisses können wir sofort mit dem Lineal die folgende Aufgabe lösen:

Es seien zwei Gerade u, u' (einer Ebene) und auf ihnen die Punkte A, B, C, D und A', B', C' gegeben; es ist der Punkt D' zu konstruieren, für den das Doppelverhältnis

$$(A'B'C'D') = (ABCD)$$

ist.

Wir projizieren von A' aus die Punkte B, C und von A aus die Punkte B', C' (Fig. 44), und es sei

$$B'' = (AB', A'B), \quad C'' = (AC', A'C), \quad u'' = B''C''.$$

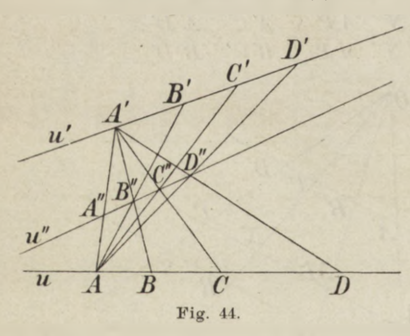


Fig. 44.

Wir projizieren dann D von A' aus auf u'' nach D'' und D'' von A aus auf u' nach D'. Der Punkt D' bildet die Lösung der Aufgabe.

In der Tat, wenn man den Schnittpunkt A'' von AA' und u'' ins Auge faßt, so zeigt sich, daß die Punktgruppen $ABCD$ und $A'B'C'D'$ zwei (von A' und A aus hergestellte) Projektionen derselben Gruppe $A''B''C''D''$ sind und daher dasselbe Doppelverhältnis haben.

Die angegebene Konstruktion erfährt keine Ausnahme, wenn einer der betrachteten Punkte uneigentlich ist; in diesem Falle sind nur die in dem vorhergehenden Paragraphen angegebenen Hilfsmittel anzuwenden.

Anmerkung. Es gibt offenbar nur einen Punkt D', für den das Doppelverhältnis $(A'B'C'D') = (ABCD)$ ist; daher führt die Kon-

struktion auf denselben Punkt D', wenn man an Stelle von A, A' die Punkte B, B' (oder C, C') zu Projektionszentren nimmt. Andrerseits ändert sich dabei die Gerade u'' nicht, da auf Grund des Pappusschen Satzes (§ 3) der Schnittpunkt von BC'' und $B'C$ auf die Verbindungslinie von $B'' = (A'B, AB')$ und $C'' = (A'C, AC')$ fällt.

Zu beachten ist der besondere Fall, in welchem z. B. die Punkte C, C' in dem gemeinsamen Punkte von u, u' zusammenfallen; dann wird die Aufgabe einfacher gelöst, indem man von dem Schnittpunkte der Geraden AA', BB' aus D auf u' projiziert.

Dieselbe Aufgabe kann auch in dem Falle, daß die Punkte A, B, C, D und A', B', C' sich auf einer und derselben Geraden u befinden, gestellt und gelöst werden. In der Tat wird sie auf den vorhergehenden Fall zurückgeführt, wenn man von irgend einem Punkte aus die Gruppe $ABCD$ auf eine von u verschiedene Gerade u' projiziert.

§ 5. Harmonische Gruppen. Wir heben nun einen wichtigen besonderen Fall des Satzes vom Doppelverhältnis hervor.

Eine Gruppe von vier Punkten A, B, C, D auf einer Geraden heißt harmonisch, wenn das Doppelverhältnis

$$(ABCD) = -1$$

ist; C und D heißen dann konjugierte harmonische Punkte zu A und B, und ebenso A und B konjugierte harmonische Punkte zu C und D. Zwei Punkte, die zu zwei andern konjugierte harmonische Punkte sind, teilen deren Strecke innen und außen nach demselben Verhältnisse.

Der allgemeine Satz des vorigen Paragraphen sagt uns, daß „die Projektion einer harmonischen Gruppe wieder eine harmonische Gruppe ist".

Von dieser Bemerkung kann man Gebrauch machen, um allgemein auf einer Geraden den zu einem Punkte konjugierten harmonischen Punkt in bezug auf zwei andere zu konstruieren.

Diese Konstruktion gründet sich auf folgenden Satz:

Die beiden Schnittpunkte der gegenüberliegenden Seiten eines Vierseits werden durch die Punkte, in denen ihre Verbindungslinie von den Diagonalen des Vierseits geschnitten werden, harmonisch getrennt.

Den Beweis erhält man, wenn man mit Hilfe einer Projektion sich auf einen besonderen Fall bezieht.

Es sei $LMNP$ ein Vierseit, und es seien $A = (LM, NP)$,

$B \equiv (MN, LP)$ und C und D die Schnittpunkte der Geraden AB mit den Diagonalen MP und LN (Fig. 45).

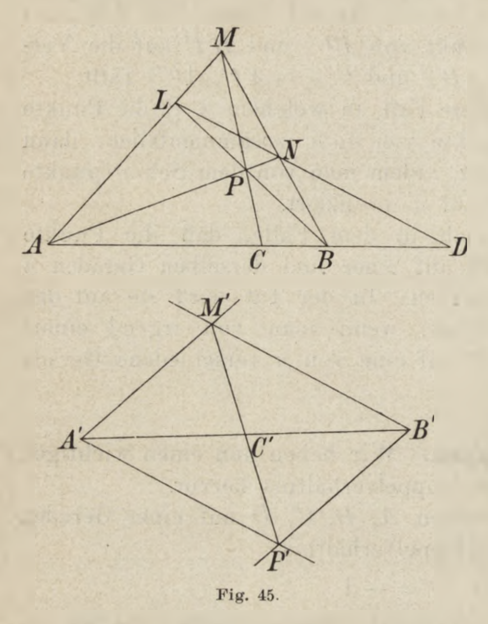


Fig. 45.

Wir projizieren die Figur auf eine andere Ebene in der Weise, daß die Gerade LN ins Unendliche rückt; bezeichnen wir dann die Projektionen der Punkte A, B, C, D, L, M, N, P mit akzentuierten Buchstaben, so ergibt sich, daß A', M', B', P' die Eckpunkte eines Parallelogramms sind; darum wird $A'B'$ von $M'P'$ halbiert, während $L'N'$ die Gerade $A'B'$ in dem unendlich fernen Punkte D'_∞ trifft. Da nun die Punkte C', D'_∞ konjugierte harmonische Punkte in bezug auf A', B' sind, so findet dasselbe für C, D in bezug auf A, B statt, w. z. b. w.

§ 6. Lineale metrische Aufgaben. Auf Grund der in dem vorhergehenden Paragraphen nachgewiesenen deskriptiven Eigenschaft der harmonischen Gruppe kann man allein mit dem Lineal in bezug auf zwei Punkte einer Geraden den zu einem dritten Punkte dieser Geraden konjugierten harmonischen Punkt konstruieren.

Insbesondere sehen wir, daß, wenn man den unendlich fernen Punkt einer Geraden durch eine Parallele zu ihr als deskriptiv gegeben betrachtet, man „allein mit dem Lineal eine Strecke halbieren kann, wenn zu der sie enthaltenden Geraden eine Parallele gegeben ist“ und umgekehrt, daß man „zu einer gegebenen Geraden eine Parallele ziehen kann, wenn auf ihr der Mittelpunkt einer Strecke gegeben ist“.

Die einfachsten Konstruktionen, die die genannten Aufgaben lösen, sind folgende:

Aufgabe. Es sind auf einer Geraden zwei aneinanderstoßende gleiche Strecken gegeben; man soll durch einen außerhalb liegenden Punkt M die Parallele zu der Geraden ziehen. Sind AC und CB die beiden gegebenen gleichen Strecken (Fig. 46), so verbinde man M mit A und B; dann wähle man z. B.

auf AM irgend einen Punkt O, wodurch als Schnitt von CO mit BM der Punkt D bestimmt ist. Nun ziehe man BO und DA. Verbindet man deren Schnittpunkt N mit M, so ist dies die verlangte Gerade.

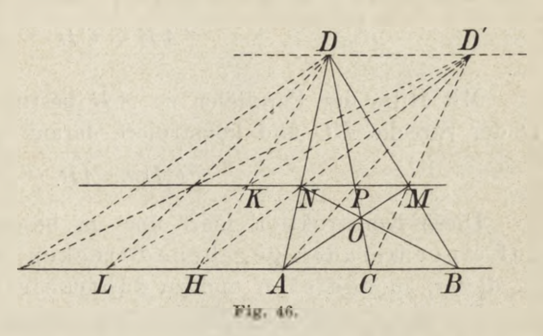


Fig. 46.

Dieselbe Figur gibt die Lösung folgender Aufgaben:

Es sind zwei parallele Gerade MN und AB gegeben und auf einer von ihnen eine Strecke AB; es ist diese Strecke in zwei gleiche Teile zu teilen.

Es sind zwei parallele Gerade MN und AB gegeben und auf einer von ihnen eine Strecke AC; es ist diese Strecke zu verdoppeln.

Und diese letzte Aufgabe, mehrfach wiederholt, führt dazu, allein mit dem Lineal eine Strecke zu konstruieren, die ein ganzes Vielfaches einer gegebenen Strecke ist, wofern man eine Parallele zu ihr kennt.

Die vorstehenden Konstruktionen lehren uns auch, wie man in einer neuen Weise die Aufgabe lösen kann „durch einen Punkt zu zwei gegebenen parallelen Geraden eine Parallele zu ziehen“ (vgl. § 3, pg. 60); man hat nur auf einer der gegebenen Geraden eine beliebige Strecke anzunehmen, die man dann in zwei gleiche Teile teilen kann, und man kann darauf mit der oben angegebenen Konstruktion weitergehen.

Aber es ist gut, folgende Bemerkung zu machen: Wenn die Parallelen AB und MN und der Punkt D gegeben sind und wenn man mit P den Mittelpunkt der Strecke MN bezeichnet (Fig. 46), so kann man sofort einen Punkt finden, der mit D auf derselben Parallelen zu AB liegt; das ist der Punkt D', in dem sich AP und CM schneiden. In der Tat sind die beiden Verhältnisse $DN : DA$ und $D'P : D'A$ gleich dem Verhältnisse $NP : AC$.

Und es ist auch bemerkenswert, daß die Geraden $D'N$ und DH, $D'K$ und DL ein einfaches Mittel darbieten, um eine Strecke zu konstruieren, die ein Vielfaches von BC oder von PM ist.

Auf Grund der vorstehenden Konstruktionen kann man mit dem Lineal noch eine weitere fundamentale Aufgabe lösen:

Es sind zwei parallele Gerade gegeben und auf einer von ihnen eine Strecke; man soll diese auf der Geraden verschieben.

Es sei AB eine Strecke, C ein Punkt der Geraden AB; man will den Punkt D konstruieren, für den in Größe und Zeichen

$$AB = CD$$

ist.

Mit Hilfe der Parallelen zu AB bestimmt man den Mittelpunkt O der Strecke BC und konstruiere darauf $OD = AO$; dann ist

$$CD = AB.$$

Diese Konstruktion lehrt uns im besondern zwei irgend wie auf einer Geraden gegebene Strecken, mit Hilfe einer Parallelen zu dieser, zu addieren und zu subtrahieren.

Übrigens wird sich eine andere Lösung derselben Aufgabe, die sich auf den Thalesschen Satz von der Proportionalität der Strecken, die auf zwei Transversalen von parallelen Geraden abgeschnitten werden, gründet, im IV. Artikel ergeben.

Wir gehen nun zu einer anderen Aufgabe über.

Sind auf einer Geraden drei Strecken a, b, c gegeben, so konstruiert man sofort, wenn eine Parallele zu der Geraden gegeben ist, mit Hilfe des soeben erwähnten Thalesschen Satzes die vierte Proportionale zu jenen Strecken (Art. IV). Man erhält so die Multiplikation der Strecke c mit dem geometrisch gegebenen Verhältnisse $b:a$.

Die Multiplikation einer Strecke stellt sich in anderer Weise dar, wenn der Multiplikator eine arithmetisch gegebene Zahl ist. Wir können auch diese Aufgabe noch mit dem Lineal lösen, wenn der Multiplikator eine rationale Zahl ist.

Wir beginnen mit der Überlegung, wie man eine Strecke in n gleiche Teile teilen kann, wenn man eine Parallele zu der Strecke kennt.

Auf dieser Parallelen kann man mit Hilfe der oben angegebenen Konstruktion n aneinanderstoßende gleiche Strecken

$$AB, BC, CD, \ldots KL$$

konstruieren. Wenn M und N die Endpunkte der gegebenen Strecke sind und O der Schnittpunkt der Geraden AM und LN (oder der Geraden AN und LM) ist, so hat man nur O mit $B, C, D \ldots K$ zu verbinden; die Verbindungslinien teilen die Strecke MN in gleiche Teile.

Wenn wir jedoch die obige Auseinandersetzung über die harmonischen Gruppen uns zu nutze machen, so können wir den n^{ten}

Teil einer gegebenen Strecke AB schneller bestimmen, vorausgesetzt daß man eine Parallele zu dieser Strecke kennt. In der Tat, man bestimme nach der üblichen Konstruktion (Fig. 47) den Mittelpunkt C der gegebenen Strecke und verbinde C mit M und D mit C'. Der hierdurch bestimmte Punkt E ist dann konjugierter harmonischer Punkt zu A in bezug auf das Paar C, B; daher haben wir

$$EC : EB = AC : AB = 1 : 2,$$

und die Strecke EB ist also der dritte Teil von AB.

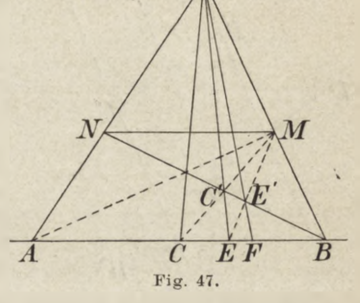


Fig. 47.

Man verbinde ferner E mit M, D mit E'. Dann ist der Punkt F konjugierter harmonischer Punkt zu C in bezug auf das Paar E, B; daher haben wir

$$FE : FB = CE : CB = 1 : 3,$$

und die Strecke FB ist also der vierte Teil von AB.

Indem man so fortfährt, kommt man zur Bestimmung des n^{ten} Teiles von AB.

Ist daher eine Strecke gegeben, die in zwei gleiche Teile geteilt ist, oder ist eine Strecke und eine Parallele zu ihr gegeben, so erkennt man, daß man allein mit dem Lineal eine Strecke bestimmen kann, die zu der gegebenen in einem rationalen Verhältnisse $\frac{m}{n}$ steht.

Anmerkung. Die angegebenen fundamentalen Konstruktionen zeigen, daß man auf einer Geraden, wenn eine Parallele zu ihr gegeben ist, alle rationalen Streckenoperationen mit Hilfe des Lineals ausführen kann (vgl. Art. IV).

Wir wollen nun die planimetrischen Konstruktionen untersuchen, die man mit dem Lineal ausführen kann, wenn auf dem Zeichenblatte zwei Paare paralleler Geraden, die innerhalb des Blattes ein Parallelogramm $ABCD$ bilden, gegeben sind (Fig. 48). Es ist leicht zu sehen, daß in diesem Falle allein mit dem Lineal alle bisher behandelten Aufgaben gelöst werden können, jedoch in bezug auf jede beliebige Gerade und jede beliebige Strecke der Ebene. Man bemerkt in der Tat, daß, wenn man durch den Mittelpunkt des Parallelogramms z. B. zu den Seiten AD und BC die Parallele zieht,

die drei Parallelen AD, FE, BC im allgemeinen auf einer beliebigen Geraden der Ebene zwei aneinanderstoßende gleiche Strecken abschneiden. (Und wenn diese Gerade eine solche Lage haben sollte, daß sie jene Parallelen außerhalb des Blattes trifft, so wird man die andern Parallelen AB, LH, DC benutzen oder durch die Endpunkte einer Diagonale die Parallelen zu der andern Diagonale des Parallelogramms ziehen können, usw.)

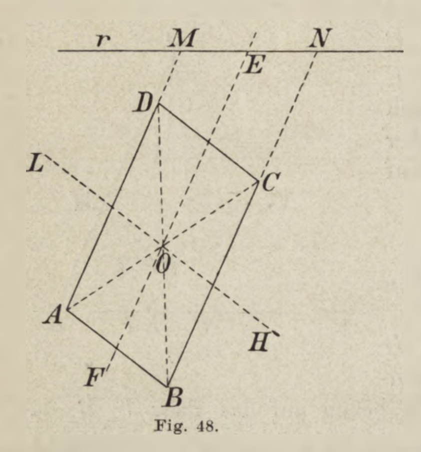


Fig. 48.

Daraus folgt unmittelbar, daß man eine gegebene Strecke PQ parallel mit sich selbst in der Weise verschieben kann, daß der Endpunkt P in einen vorgeschriebenen Punkt R fällt; in der Tat hat man nur mit Hilfe des gegebenen Parallelogramms durch Q die Parallele zu PR und durch R die Parallele zu PQ zu ziehen.

Und wir sehen also, daß, wenn auf dem Zeichenblatte ein Parallelogramm gegeben ist, man allein mit dem Lineal

1. durch irgend einen Punkt zu irgend einer Geraden die Parallele ziehen,

2. eine gegebene Strecke parallel mit sich selbst verschieben kann.

Wir erhalten hier beiläufig eine neue Konstruktion der Aufgabe (§ 3, pg. 64): Es ist auf dem Blatte ein Parallelogramm gegeben; man soll durch einen gegebenen Punkt die Parallele zu einer gegebenen Geraden ziehen.

Wir geben noch ein Beispiel.

Es sei auf einer Geraden r irgend eine Strecke gegeben, man will sie in m gleiche Teile teilen. Durch das fundamentale Parallelogramm werden auf r zwei aneinanderstoßende gleiche Strecken ME, EN abgeschnitten. Man kann dann eine Gerade $M'N'$ parallel zu r konstruieren und auf $M'N'$ m aneinanderstoßende gleiche Strecken herstellen und wird somit wie oben (pg. 72) zur Teilung der gegebenen Strecke in m gleiche Teile gelangen.

Weitere Konstruktionen allein mit dem Lineal werden ausführbar, wenn auf dem Zeichenblatte andere Figuren gegeben sind, die bestimmten metrischen Bedingungen genügen.

Es seien z. B. außer dem genannten Parallelogramme zwei rechte Winkel ab, $a'b'$ mit nicht parallelen Schenkeln gegeben.

Wir können dann folgende Aufgaben lösen:

1. Es ist durch einen gegebenen Punkt die Normale zu einer gegebenen Geraden zu ziehen.

Wenn der gegebene Punkt M sich außerhalb der gegebenen Geraden r befindet, so ziehe man die Geraden MA, MB (Fig. 49) parallel zu den Geraden a, a' und darauf die Geraden AC, BD parallel zu den Geraden b', b. Die Gerade MO wird die verlangte Normale sein, da O der Schnittpunkt der drei Höhen des Dreiecks MAB ist. Wenn ferner der Punkt M sich auf der Geraden r befindet, so wird man zweckmäßig irgend eine Parallele zu r ziehen, usw.

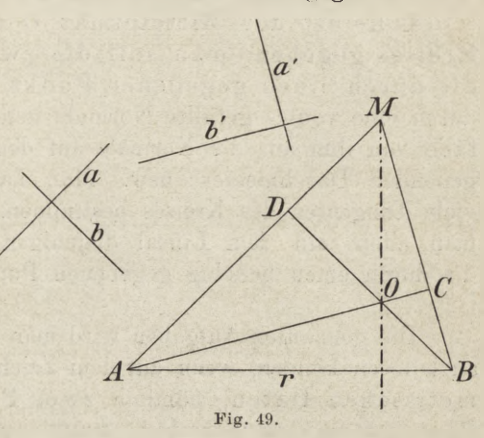


Fig. 49.

2. Es ist ein Winkel zu konstruieren, der das n-fache eines gegebenen Winkels ist. Man konstruiere (Fig. 50) eine Normale MN zu einem Schenkel des gegebenen Winkels ABC und mache die Strecke $MP = MN$; dann ist der Winkel PBC doppelt so groß als der gegebene. Um den n-fachen Winkel zu erhalten, hat man nur dieselbe Konstruktion zu wiederholen.

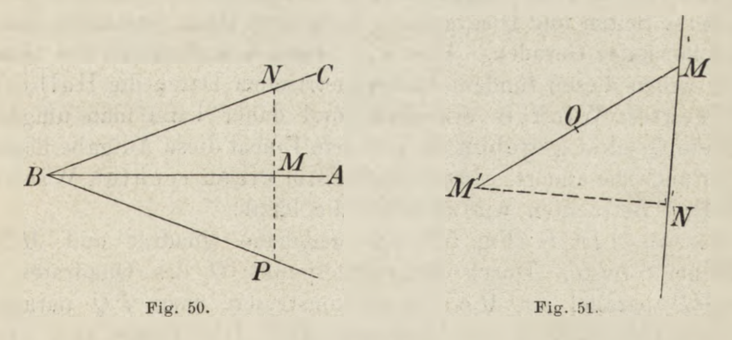


Fig. 50. Fig. 51.

3. Es ist der Mittelpunkt O (Fig. 51) und ein Punkt M eines Kreises gegeben (oder es sind drei Punkte eines Kreises gegeben); man soll den zweiten Schnittpunkt einer durch M gehenden Geraden mit dem Kreise bestimmen. Man konstruiere den Durch-

messer MOM' und fälle von dem Punkte M' aus die Normale auf die gegebene Gerade: der Fußpunkt dieser Normalen ist der gesuchte Punkt. Man kann auf diese Weise allein mit dem Lineal beliebig viele Punkte des Kreises konstruieren. Das besagt aber nicht, daß man allein mit dem Lineal diejenigen Punkte des Kreises bestimmen kann, die einer beliebig gezeichneten Geraden angehören.

4. Es ist der Mittelpunkt O und eine Tangente m des Kreises gegeben; man soll die zweite Tangente bestimmen, die durch einen gegebenen Punkt von m geht. Man bestimme durch eine von O gefällte Normale den Berührungspunkt von m und fälle von ihm aus die Normale auf den durch den gegebenen Punkt gehenden Durchmesser, usw. Man kann auf diese Weise beliebig viele Tangenten des Kreises bestimmen. Das besagt aber nicht, daß man allein mit dem Lineal diejenigen Tangenten bestimmen kann, die durch einen beliebig gegebenen Punkt gehen.

Die genannten Aufgaben wird man offenbar allein mit dem Lineal auch lösen können, wenn auf dem Zeichenblatte die fundamentalen metrischen Daten, nämlich zwei Paare paralleler und zwei Paare normaler Geraden, durch eine kompliziertere Figur gegeben sind. Und in diesen Fällen kann es sich ergeben, daß man mit Hilfe der gegebenen Figur noch andere Aufgaben mit dem Lineal lösen kann, deren Lösung man allein auf Grund jener Daten vergebens suchen würde.

Man erhält hierfür ein Beispiel[1]), wenn man voraussetzt, daß auf dem Zeichenblatte ein Quadrat gegeben ist.

Seine Seiten und Diagonalen liefern zwei Paare paralleler und zwei Paare normaler Geraden. Aber die lineale Konstruktion des Quadrats würde neben diesen fundamentalen metrischen Daten die Halbierung des rechten Winkels erfordern, und daher kann man umgekehrt, wenn ein Quadrat gegeben ist, mit dem Lineal diese Aufgabe lösen und mit ihr auch die andere, eine Strecke um einen rechten Winkel zu drehen. Betrachten wir zunächst die letzte.

Es sei $ABCD$ (Fig. 52) das gegebene Quadrat und MN die gegebene Strecke. Durch den Mittelpunkt O des Quadrates ziehe man OP parallel zu MN; dann konstruiere man PQ parallel zu AB und QR parallel zur Diagonale AC. Die Gerade OR wird zu OP normal sein; dies erkennt man sofort aus der Kongruenz der Dreiecke DOR und COP. Das Dreieck ROP ist gleichschenklig

1) J. Steiner, l. c.

und rechtwinklig, und man wird also die gestellte Aufgabe lösen, wenn man durch M die Parallele zu OR und durch N die Parallele zu PR zieht.

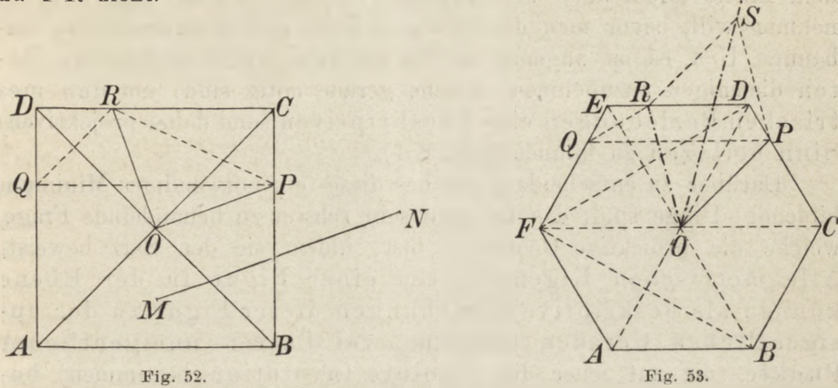


Fig. 52. Fig. 53.

Vervollständigt man das Dreieck ROP zu einem Quadrat, so kann man, indem man zu seiner von O ausgehenden Diagonale durch M die Parallele zieht, die Gerade MN um 45⁰ drehen, d. h. einen rechten Winkel halbieren.

Als ein Seitenstück hierzu können wir den Fall betrachten, daß auf dem Zeichenblatte ein reguläres Sechseck gegeben ist.

Die Seiten und Diagonalen dieses Sechsecks liefern zwei Paare paralleler und zwei Paare normaler Geraden, aber seine lineale Konstruktion würde außerdem die Dreiteilung des rechten Winkels erfordern. Daher kann man umgekehrt auf Grund der Kenntnis des regulären Sechsecks eine Strecke um 60^0 und eine Gerade um 30^0 drehen, wie man leicht erkennt (Fig. 53).

§ 7. Kritische Bemerkungen. Alle oben mit dem Lineal gelösten Aufgaben hängen analytisch von Gleichungen ersten Grades ab, durch welche die unbekannten Elemente mit den gegebenen verbunden sind, und heißen daher Aufgaben ersten Grades.

Die Aufgaben ersten Grades sind die einzigen, die allein mit dem Lineal gelöst werden können (vgl. Art. IV).

Aber unsere letzten Beispiele lassen klar erkennen, daß die Ausdehnung des Gebietes der Aufgaben ersten Grades davon abhängt, was man als gegeben annimmt. Wenn z. B. allgemein ein Parallelogramm und zwei rechte Winkel gegeben sind, so würde die Halbierung des rechten Winkels eine Aufgabe zweiten Grades bilden, während sie eine Aufgabe ersten Grades und also mit dem Lineal lösbar ist, wenn ein Quadrat gegeben ist, usw.

Um die Klasse der metrischen Aufgaben ersten Grades genau zu bestimmen, muß man daher ein Übereinkommen treffen, welche (mit dem Lineal allein nicht konstruierbare) Dinge man als gegeben annehmen will, bevor man den Gebrauch jedes andern Instrumentes verbannt. Und es ist angemessen als fundamentale metrische Daten diejenigen anzunehmen, welche gerade nötig sind, um den metrischen Beziehungen einen deskriptiven (und daher projektiven) Sinn beilegen zu können (vgl. § 1).

Darüber zu entscheiden, welches diese (ein notwendiges Minimum bildende) Dinge sind, das ist eine sehr schwer zu behandelnde Frage, welche die projektive Geometrie löst, indem sie den Satz beweist: Alle metrischen Eigenschaften einer Figur in der Ebene können als deskriptive Beziehungen dieser Figur zu der uneigentlichen Geraden und zu zwei Paaren uneigentlicher Punkte (die auf jener die absolute Involution bestimmen) betrachtet werden.[1])

Als fundamentale Daten für die metrischen Konstruktionen kann man also „ein Parallelogramm und zwei Paare orthogonaler Richtungen" annehmen.

An Stelle dieser Daten kann man irgend eine andere Figur nehmen, mit deren Hilfe man die Konstruktion jener lineal (d. h. mit dem Lineal) ausführen kann. Aber es ist nicht ausgeschlossen, daß diese Figur zu jenen Daten etwas hinzufügt und dadurch die Möglichkeit gibt, eine ausgedehntere Klasse von Aufgaben lineal zu lösen, wie wir es gerade bei den Beispielen des Quadrates und des Sechsecks gesehen haben.[2])

§ 8. Lineale Konstruktionen bei gegebenem Kreise. Eine weitere Ausdehnung des Gebietes der mit dem Lineal lösbaren Aufgaben ergibt sich, wenn man voraussetzt, daß in der Ebene eine Linie, z. B. ein Kreis, gezogen ist, deren Schnittpunkte mit irgend einer Geraden man also unmittelbar bestimmen kann.

Wenn die gezogene Linie vom zweiten Grade ist, so gelangt man unter diesen Umständen dazu, mit dem Lineal alle Aufgaben zweiten Grades und diejenigen höheren Grades zu lösen, die sich auf den zweiten Grad zurückführen lassen (vgl. § 9 und Art. IV).

Suchen wir vom geometrischen Standpunkte aus klarzustellen,

---

1) Vgl. z. B. F. Enriques, *Vorlesungen über projektive Geometrie*, Leipzig 1903.

2) Im Hinblick auf Artikel IV kann man sagen, daß das Gegebensein eines Quadrates dem Rationalitätsbereiche die Quadratwurzel aus einer rationalen Zahl hinzufügt.

was man mit dem Lineal machen kann, wenn auf dem Zeichenblatte ein vollständig gezogener (fundamentaler) Kreis gegeben ist, von dem wir auch den Mittelpunkt als gegeben annehmen wollen.[1])

Wir bemerken vor allem, daß wir dann mit dem Lineal beliebig viele dem Kreis einbeschriebene Rechtecke konstruieren und daher die bereits oben behandelten Aufgaben (ersten Grades) lösen können. Ferner können jetzt einige Konstruktionen vereinfacht werden. Sehen wir z. B. zu, wie man zu einer gegebenen Geraden r eine Normale bestimmen kann. Wenn diese Gerade den fundamentalen Kreis nicht trifft oder durch den Mittelpunkt geht, so konstruiere man (mit Hilfe irgend eines dem Kreise einbeschriebenen Rechtecks) irgend eine Gerade, die den Kreis trifft und zu r parallel ist. Es seien M und N ihre Schnittpunkte mit dem Kreise, und MP sei der Durchmesser durch M (Fig. 54). Die Gerade NP ist dann zu r normal.

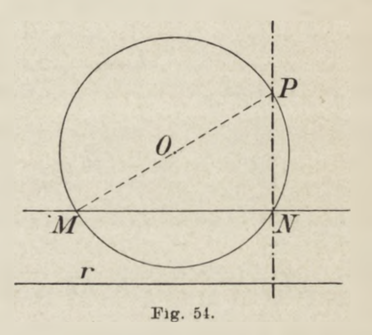


Fig. 54.

Wir wollen auch die in § 4 behandelte Aufgabe wieder aufnehmen, nämlich:

Es ist auf einer Geraden u der Punkt D' zu konstruieren, der mit drei gegebenen Punkten A', B', C' ein Doppelverhältnis gleich demjenigen von vier anderen auf derselben Geraden gegebenen Punkten A, B, C, D bildet.

Wir projizieren die Punkte A, B, C, D, A', B', C' von einem Punkte O des fundamentalen Kreises aus auf den Kreis selbst; es mögen A_1, B_1, C_1, D_1, A_1', B_1', C_1' die erhaltenen Projektionen sein (Fig. 55).[2])

Nun bemerken wir, daß, wenn man vier Punkte eines Kreises von zwei verschiedenen, dem Kreise selbst angehörenden Punkten aus projiziert, man Quadrupeln von Strahlen erhält, die zu je zweien dieselben Winkel bilden und daher gleiche Doppelverhältnisse haben. Im besonderen haben also die Strahlenquadrupel $A_1'(A_1 B_1 C_1 D_1)$ und $A_1(A_1' B_1' C_1' D_1')$ gleiche Doppelverhältnisse. Daher kann man D_1' in folgender Weise konstruieren: Man bestimmt die Punkte

1) Wenn der Mittelpunkt nicht bekannt ist, so kann man ihn mit dem Lineal konstruieren, wenn in der Ebene ein fundamentales Parallelogramm gegeben ist, da man dann parallele Sehnen des Kreises konstruieren und halbieren kann.

2) Um jede mögliche Ausnahme fortzuschaffen, soll der Punkt O als Projektion des Punktes angesehen werden, in welchem die Gerade u von der in O gezogenen Tangente geschnitten wird.

$B'' \equiv (A_1 B_1', A_1' B_1)$, $C'' \equiv (A_1 C_1', A_1' C_1)$ und $D'' \equiv (A_1' D_1, B'' C'')$; der Punkt D_1' ist dann der Punkt des Kreises, den man durch die Projektion des Punktes D'' von A_1 aus erhält. In der Tat, wenn $A'' \equiv (A_1 A_1', B'' C'')$ ist, so werden die beiden Strahlenquadrupel

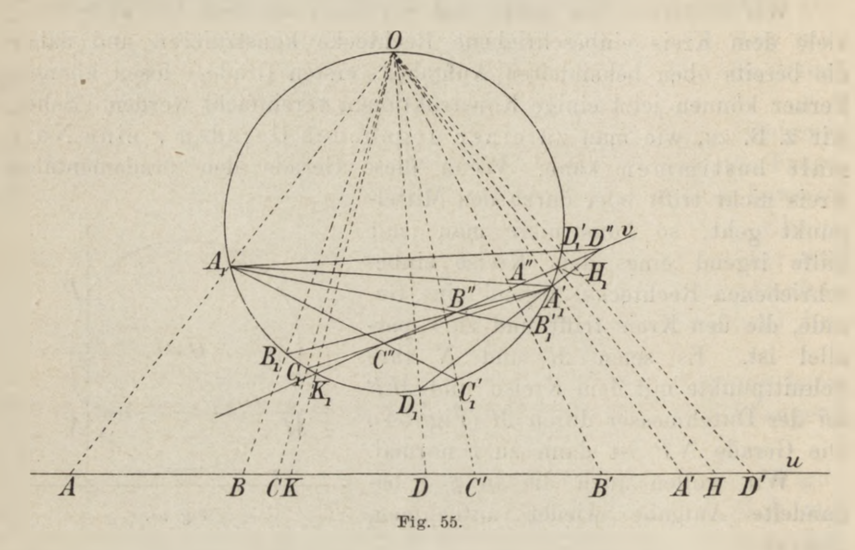


Fig. 55.

$A_1'(A_1 B_1 C_1 D_1)$, $A_1(A_1' B_1' C_1' D_1')$ von der Geraden $v \equiv B'' C''$ in denselben vier Punkten A'', B'', C'', D'' geschnitten, und sie haben daher dasselbe Doppelverhältnis

$$(A'' B'' C'' D'') = (ABCD).$$

Der gesuchte Punkt D' liegt dann auf dem Strahle OD_1'.

§ 9. Projektive Punktreihen. Doppelpunkte. Die bei der letzten Aufgabe benutzte Figur (Fig. 55) gibt uns auch sofort die Lösung einer anderen Aufgabe von höherer Ordnung an die Hand:

Es sind auf der Geraden u die Punkte zu bestimmen, welche mit A, B, C und mit A', B', C' dasselbe Doppelverhältnis bilden.

Wir sehen in der Tat, daß man die Punkte H, K, die diese Aufgabe lösen, erhält, indem man die beiden Schnittpunkte der Geraden v mit dem fundamentalen Kreise von O aus auf u projiziert.

In einem besonderen Falle, wenn C' sich im Unendlichen befindet (vgl. pg. 68), gibt uns die vorstehende Konstruktion die Lösung folgender Aufgabe:

Es ist auf einer Geraden ein (als vorhanden vorausgesetzter) Punkt H zu bestimmen von der Art, daß die Verhältnisse seiner Entfernungen von zwei Punktepaaren A, B und A', B' zueinander in demselben Verhältnisse λ stehen wie zwei vorgeschriebene Strecken, also:

$$\frac{A'H}{B'H} = \lambda \frac{AH}{BH}.$$

Diese Aufgabe wurde von Apollonius unter dem Namen

Sectio determinata (περὶ διωρισμένης τομῆς)

behandelt.

Kehren wir zu der oben gelösten allgemeinen Aufgabe zurück.

Diese Lösung erhält eine umfassendere Bedeutung und kann dann bemerkenswerte Anwendungen erfahren, wenn man den Begriff der „projektiven Geraden (oder Punktreihen)“ einführt. Zwei Gerade, oder zwei auf ihnen gegebene Reihen von Punkten $A, B, C, D, E \ldots$, $A', B', C', D', E' \ldots$ (Punktreihen), sollen „projektiv“ heißen, wenn man von der einen zur andern durch eine gewisse Anzahl von Projektionen gelangt, die von festen Zentren aus auf feste Gerade ausgeführt werden. Vermittelst dieser Projektionen entspricht jedem Punkte der einen Geraden ein bestimmter Punkt der andern; entsprechende (oder homologe) Punkte bezeichnet man im allgemeinen mit denselben Buchstaben, die man durch Striche voneinander unterscheidet. Die Beziehung zwischen zwei projektiven Geraden oder Punktreihen heißt Projektivität. Man kann auch zwischen (ineinanderliegenden) Punktreihen einer und derselben Geraden eine Projektivität herstellen, wie z. B. in der nebenstehenden Figur.

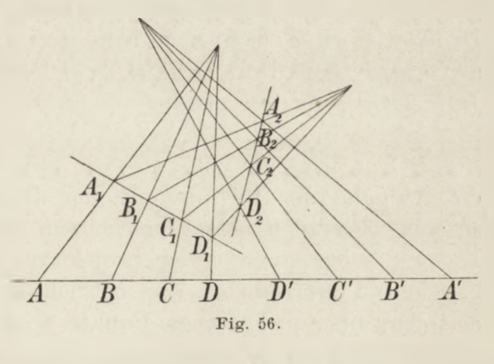


Fig. 56.

Aus dem, was wir im § 4 bewiesen haben, folgt nun:

Wenn zwei Punktreihen projektiv sind, so ist das Doppelverhältnis von irgend welchen vier Punkten der einen gleich dem Doppelverhältnisse der vier homologen Punkte der andern. Umgekehrt, wenn man mit Hilfe irgend einer Konstruktion jedem Punkte einer Geraden u einen Punkt einer Geraden u' in der Weise zuordnet, daß die Doppel-

verhältnisse homologer Punktquadrupel gleich sind, so können die beiden Geraden u und u' als projektiv betrachtet werden. Man kann übrigens auf Grund der im § 4 angegebenen Konstruktion von jedem Punkte der einen Geraden zu dem homologen auf der andern durch zwei (drei, wenn die Geraden u, u' ineinander liegen) Projektionen gelangen.

Die vorstehenden Bemerkungen erscheinen durch folgende Aussage, die in ihnen enthalten ist, in hellerem Lichte:

In der Ebene kann ein System von beliebig vielen Projektionen, die von einer Geraden u zu einer (projektiven) Geraden u' führen, durch zwei oder drei Projektionen ersetzt werden, je nachdem die u, u' verschieden sind oder ineinander liegen, und alle Projektionen, welche drei Punkten A, B, C der ersten Geraden drei gegebene Punkte A', B', C' der zweiten zuordnen, führen von irgend einem Punkte der ersten Geraden stets zu einem und demselben Punkte der zweiten. Kurz, die Projektivität zwischen zwei Geraden ist durch drei Paare homologer Punkte bestimmt, wenn auch beliebig viele verschiedene Konstruktionen angegeben werden können, die von jedem Punkte zu seinem homologen führen.

Nach diesen Vorbemerkungen setzen wir voraus, es bestehe auf einer Geraden (oder zwischen zwei ineinanderliegenden Geraden) eine Projektivität. Ein Punkt, der mit seinem homologen Punkte zusammenfällt, heißt ein Doppelpunkt. Dann lehrt uns die zu Beginn dieses Paragraphen angegebene Konstruktion die Bestimmung der Doppelpunkte (wenn solche existieren) einer Projektivität auf einer Geraden, sobald drei Paare homologer Punkte AA', BB', CC' gegeben sind.

Sehen wir nun zu, wie wir vom elementaren Standpunkte aus die Aufgabe der Bestimmung der Doppelpunkte einer Projektivität auf einer Geraden besser beleuchten.

Es seien u, u' zwei projektive (verschiedene oder ineinander liegende) Punktreihen. Wir betrachten den Punkt I' der Geraden u', der dem unendlich fernen Punkte I_∞ der Geraden u entspricht, und den Punkt I der Geraden u, der dem unendlich fernen Punkte I'_∞ der Geraden u' entspricht; diese beiden Punkte heißen die Grenzpunkte der Projektivität. Sie sind eigentliche Punkte, abgesehen von dem Falle, in welchem die beiden unendlich fernen Punkte der Geraden u, u' sich entsprechen. In diesem Falle nimmt die Projektivität eine besonders einfache Bedeutung an, weil dann die homologen Strecken proportional sind; sie führt den Namen Ähnlichkeit.

Wenn PP', QQ' zwei Paare entsprechender Punkte sind, so ergibt sich:

$$(PQII_\infty) = (P'Q'I'_\infty I'),$$

woraus folgt

$$\overline{PI} \cdot \overline{P'I'} = \overline{QI} \cdot \overline{Q'I'} = k.$$

Man sieht also, daß in projektiven Punktreihen das Produkt der Entfernungen zweier entsprechender Punkte von den zu ihnen gehörigen Grenzpunkten konstant ist.

Setzen wir nun voraus, daß die beiden Punktreihen u, u' ineinanderliegen, und schließen wir den besonderen Fall der Ähnlichkeit aus.

Dann ist ein Punkt H ein Doppelpunkt, wenn

$$\overline{HI} \cdot \overline{HI'} = k$$

ist. Sehen wir also die beiden Grenzpunkte und k als gegeben an, so folgt, daß die allgemeine Aufgabe, die Doppelpunkte einer Projektivität auf einer Geraden zu konstruieren, der Konstruktion zweier Strecken gleichkommt, wenn deren Summe (oder Differenz) und deren Produkt gegeben ist. Und darum ist die Konstruktion der Doppelpunkte der Projektivität gleichbedeutend mit der graphischen Konstruktion der Wurzeln der allgemeinen Gleichung zweiten Grades, die schon von Euklid, entweder mit Hilfe der Theorie der Flächengleichheit oder mit Hilfe der Proportionen, ausgeführt worden ist.

Anmerkung. Die einfachste elementare Form der Aufgabe erhält man, wenn man den Mittelpunkt O der Strecke II' einführt; dann läßt sich die Relation $\overline{HI} \cdot \overline{HI'} = k$ schreiben:

$$(\overline{HO} + \overline{OI})(\overline{HO} + \overline{OI'}) = k$$

oder, da $\overline{OI'} = -\overline{OI}$ ist,

$$\overline{HO}^2 = \overline{OI}^2 + k.$$

Sind also die Grenzpunkte und ein Paar P, P' entsprechender Punkte der Projektivität bekannt, dann kann man auf Grund der Relation

$$\overline{HO}^2 = \overline{OI}^2 + \overline{PI} \cdot \overline{P'I'}$$

die beiden Doppelpunkte (wenn sie reell sind) konstruieren. Und zwar findet folgendes statt: Wenn die beiden Strecken $\overline{PI}$, $\overline{P'I'}$ denselben Sinn haben, dann existieren zwei reelle, symmetrisch zu O liegende Doppelpunkte, und ihre Entfernung von O ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, in dem eine Kathete gleich $\overline{OI}$ und die andere Kathete gleich der mittleren Proportionale zu $\overline{PI}$ und

$\overline{P'I'}$ ist; wenn dagegen die Strecken $\overline{PI}$, $\overline{P'I'}$ entgegengesetzten Sinn haben (und daher ihr Produkt negativ ist), dann sind die beiden Doppelpunkte nur dann reell (verschieden oder zusammenfallend), wenn $\overline{OI}$ nicht kleiner als die mittlere Proportionale zu $\overline{PI}$ und $\overline{P'I'}$ ist, und in diesem Falle ist ihre Entfernung von O die Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse gleich $\overline{OI}$ und dessen andere Kathete gleich der genannten mittleren Proportionale ist.

Wenn man daher Lineal und Zirkel ohne Beschränkung benutzt, so kann man die Doppelpunkte in folgender Weise schnell konstruieren. Wenn die Grenzpunkte I, I' und das Paar P, P' gegeben sind, so errichten wir (Fig. 57) in I' eine normale Strecke gleich $\overline{P'I'}$ und in I eine normale Strecke gleich $\overline{PI}$, jedoch in der Weise, daß diese beiden Strecken auf derselben Seite des Trägers u der beiden Punktreihen sich befinden oder nicht, je nachdem die Strecken $\overline{PI}$, $\overline{P'I'}$ entgegengesetzten oder gleichen Sinn haben. Die Gerade, welche die Endpunkte Q, Q' dieser beiden Normalen verbindet, kann den über II' als Durchmesser geschlagenen Kreis schneiden (sie schneidet ihn immer, wenn Q, Q' nicht auf derselben Seite von u liegen); die zu QQ' in den Schnittpunkten R, R' errichteten Normalen bestimmen dann auf u die Doppelpunkte H, K. In der Tat geht aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $Q'I'R$, HIR und der Dreiecke IRQ, $I'RH$ sofort hervor, daß

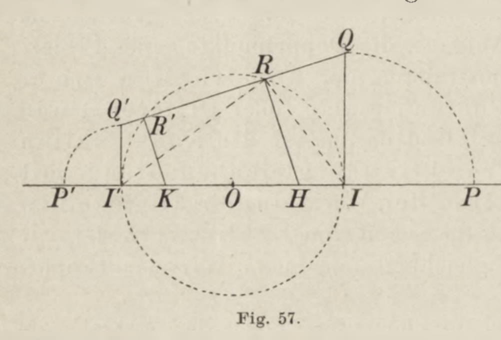


Fig. 57.

$$HI' \cdot HI = P'I' \cdot PI$$

ist.

§ 10. Lösung einiger klassischer Aufgaben nach der Methode der Versuche. Wir wollen sofort an konkreten Beispielen zeigen, wie die Konstruktion der Doppelpunkte der Projektivität eine wichtige Methode zur Lösung einer Klasse elementarer Aufgaben liefert. Diese Methode führt den Namen Methode der Versuche oder Methode der falschen Lage (regula falsi).

Beginnen wir mit den Schnittaufgaben des Apollonius; eine dieser Aufgaben (sectio determinata) ist bereits im § 9 (pg. 81) behandelt worden.

Sectio rationis (*περὶ λόγου ἀποτομῆς*).

Es sind in einer Ebene zwei Gerade r, s gegeben, und auf jeder von ihnen soll ein Sinn und ein Anfangspunkt der Strecken bestimmt sein, außerdem ist in derselben Ebene ein Punkt S gegeben; man soll durch S eine Gerade so ziehen, daß die beiden von ihr auf r, s abgeschnittenen (von den festgesetzten Anfangspunkten aus gerechneten) Strecken in dem Verhältnisse λ zweier vorgeschriebener Strecken zueinander stehen.

Es mögen O, O' die auf den Geraden r, s festgesetzten Anfangspunkte sein. Man nehme auf r irgend einen Punkt A an und konstruiere auf s den Punkt A', für den in Größe und Zeichen

$$\overline{OA} : \overline{O'A'} = \lambda$$

ist.

Wenn zufällig die Gerade AA' durch S hindurchgeht, dann hat man eine Lösung der Aufgabe. Aber im allgemeinen wird der Versuch nicht gelingen, und analoge Versuche, die man anstellt, indem man auf r die Punkte B, C, ... annimmt und auf s die Punkte B', C', ... bestimmt, für welche

$$\overline{OB} : \overline{O'B'} = \overline{OC} : \overline{O'C'} = \lambda$$

ist, werden mit gleicher Wahrscheinlichkeit fehlschlagen. Wir bemerken jedoch, daß man mit diesen wiederholten Versuchen zwischen den Punktreihen A, B, C ..., A', B', C' ... eine besondere Projektivität (Ähnlichkeit, pg. 82) herstellt.

Wenn wir nun die Punkte A, B, C ... auf r von dem Punkte S aus auf s projizieren, so werden wir die Punkte A'', B'', C'' ... erhalten, und auch die beiden Punktreihen A, B, C ..., A'', B'', C'' ... werden projektiv sein. Wir erhalten also auf s die beiden ineinander liegenden projektiven Punktreihen A', B', C' ..., A'', B'', C'' .... Ihre Doppelpunkte geben, wenn sie reell sind, mit S verbunden die Lösungen der gestellten Aufgabe.

Sectio spatii (*περὶ χωρίου ἀποτομῆς*).

Es sind in einer Ebene zwei Gerade r, s gegeben, und auf jeder von ihnen soll ein Sinn und ein Anfangspunkt der Strecken bestimmt sein, außerdem ist in derselben Ebene ein Punkt S gegeben; man soll durch S eine Gerade so ziehen, daß das Produkt der beiden von ihr auf r, s abgeschnittenen (von den festgesetzten Anfangspunkten aus gerechneten) Strecken einem gegebenen Quadrate q^2 gleich ist.

Es seien wieder O, O' die festgesetzten Anfangspunkte auf r, s. Wir nehmen auf der Geraden r beliebige Punkte A, B, C ... an und bestimmen auf s die Punkte A', B', C' ... so, daß

$$\overline{OA} \cdot \overline{O'A'} = \overline{OB} \cdot \overline{O'B'} = \overline{OC} \cdot \overline{O'C'} = \cdots = q^2$$

ist.

Dann sind die Punktreihen $A, B, C \ldots$, $A', B', C' \ldots$ projektiv, da O, O' Grenzpunkte von ihnen sind (§ 9, pg. 83). Projizieren wir die Punkte $A, B, C \ldots$ der Geraden r von dem Punkte S aus auf die Gerade s, so erhalten wir die Punkte A'', B'', C'' ..., und es sind dann auch die Punktreihen $A, B, C \ldots$, $A'', B'', C'' \ldots$ projektiv. Somit bekommen wir auf s die beiden ineinander liegenden projektiven Punktreihen $A, B, C \ldots$, $A'', B'', C'' \ldots$ Die Doppelpunkte dieser Projektivität geben, wenn sie reell sind, mit S verbunden die Lösungen der gestellten Aufgabe.

Dieselbe Methode der falschen Lage kommt bei der folgenden bekannten Aufgabe zur Anwendung: Es ist ein Dreieck mit den Seiten r, s, t und ein Dreieck mit den Ecken R, S, T gegeben; man soll ein Dreieck konstruieren, das dem ersten Dreiecke einbeschrieben und dem zweiten umbeschrieben ist.[1])

Man nehme auf der Seite r die Punkte A, B, C ... an und projiziere sie von R aus auf die Seite s, dadurch wird man auf s die Punkte A', B', C' ... erhalten. Dann projiziere man diese Punkte von S aus auf die Seite t, wodurch man die Punkte A'', B'', C'' ... erhalten wird; und endlich projiziere man diese Punkte von T aus auf die Seite r, was die Punkte A''', B''', C''' ... ergeben mag. Die beiden Punktreihen $A, B, C \ldots$, $A''', B''', C''' \ldots$ auf der Seite r sind projektiv, und es ist klar, daß, wenn z. B. der Punkt A mit A''' zusammenfällt, das Dreieck $AA'A''$ eine Lösung der Aufgabe bildet. Die Doppelpunkte dieser Projektivität werden also, falls sie reell sind, Lösungen der gestellten Aufgabe liefern. Und man wird andere Lösungen erhalten, wenn man die Seiten und die Eckpunkte der beiden gegebenen Dreiecke in anderer Weise kombiniert.

Analog der vorstehenden Aufgabe, aber etwas schwieriger ist die Aufgabe von Giordano d'Ottaiano:

Es ist ein Dreieck zu konstruieren, das einem gegebenen Kreise einbeschrieben und einem gegebenen Dreiecke umbeschrieben ist.

1) Von einem Dreiecke sagt man, es sei einem andern in dem allgemeinsten Sinne des Wortes einbeschrieben, wenn seine Eckpunkte sich auf den Seiten oder den Verlängerungen der Seiten des anderen befinden; von dem zweiten Dreiecke sagt man dann, es sei dem ersten umbeschrieben.

Um diese Aufgabe nach der oben angegebenen Methode zu lösen, ist vorauszuschicken, wie der Begriff projektiver Punktreihen für Punktreihen auf einem Kreise erweitert wird.

Wir wollen die Sache kurz andeuten. Zwei Punktreihen auf einem Kreise heißen „projektiv", wenn sie von einem Punkte des Kreises aus in projektive Punktreihen auf einer Geraden projiziert werden. Es geht aus den im § 8 gemachten Bemerkungen (pg. 79) hervor, daß, „wenn man zwei auf einem Kreise gegebene projektive Punktreihen von zwei Punkten des Kreises aus auf irgend welche Geraden projiziert, man immer projektive Punktreihen erhält, und umgekehrt". Man konstruiert die Projektivität auf einem Kreise, wie es im § 8 angegeben ist, und kann dann die (möglicherweise vorhandenen) Doppelpunkte bestimmen.

Nun kann man beweisen, daß, „wenn man diejenigen Punkte eines Kreises einander zuordnet, die sich mit einem festen, dem Kreise nicht angehörenden Punkte O auf einer Geraden befinden, man projektive Punktreihen erhält". Diese Eigenschaft gründet sich auf einen bekannten Satz von den Polaren in folgender Weise:

Es seien AA', BB', CC', ... Punktepaare des gegebenen Kreises, die sich mit O in gerader Linie befinden (Fig. 58). Die Punkte $(A'B, AB')$, $(AB, A'B')$ befinden sich auf einer Geraden, welche die Geraden AA', BB' in den Punkten trifft, die zu dem Punkte O in bezug auf die Paare AA', BB' konjugiert harmonisch sind (vgl. § 5). Aber alle Punkte, die zu dem Punkte O in bezug auf die Paare AA', BB', CC',... konjugiert harmonisch sind, liegen auf einer Geraden o, die die Polare von O heißt. Daraus folgt, daß die Punktreihen $A, B, C \ldots, A', B', C' \ldots$ als Projektionen einer und derselben auf o liegenden Punktreihe von den Punkten A', A aus betrachtet werden können. Daher sind $A, B, C \ldots$, $A', B', C' \ldots$ projektive Punktreihen, w. z. b. w.

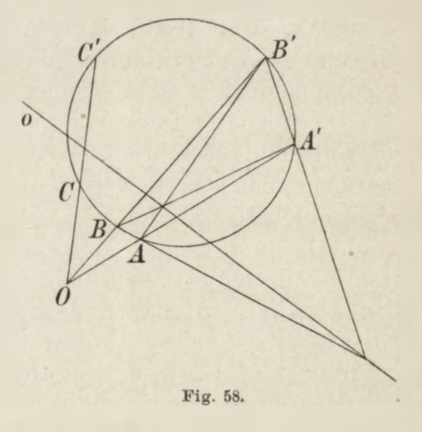


Fig. 58.

Nun kommen wir zur Lösung der gestellten Aufgabe. Es sei R, S, T das gegebene Dreieck, dessen Eckpunkte nicht dem Kreise angehören.

Man nehme auf dem Kreise einen Punkt A an und projiziere

ihn von R aus auf den Kreis nach A'; ebenso projiziere man A' von S aus nach A'' und A'' von T aus nach A''' (Fig. 59).

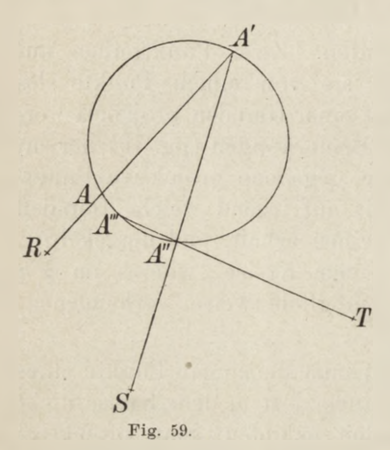


Fig. 59.

Wenn A mit A''' zusammenfallen sollte, so hat man eine Lösung der Aufgabe. Dies wird jedoch im allgemeinen nicht eintreten. Aber, wenn man diese Konstruktion von verschiedenen Punkten $A, B, C \ldots$ des Kreises aus wiederholt, so wird man die Punktreihen $A', B', C' \ldots, A'', B'', C'' \ldots, A''', B''', C''' \ldots$ erhalten, die zu je zweien und daher zueinander projektiv sind. Daher kann man nach drei Versuchen die Doppelpunkte der Projektivität von $A, B, C \ldots, A''', B''', C''' \ldots$ konstruieren, die die Aufgabe lösen.

Eine analoge Lösung würde sich für die andere, auch von Giordano d'Ottaiano herstammende Aufgabe ergeben: Es ist ein Dreieck zu konstruieren, das einem gegebenen Kreise umbeschrieben und einem gegebenen Dreiecke einbeschrieben ist.

§ 11. Der feste Kreis als Ersatz des Zirkels. Wenden wir unsere Aufmerksamkeit der im § 9 angegebenen Konstruktion der Doppelpunkte einer Projektivität auf der Geraden zu.

Diese Konstruktion wird allein mit dem Lineal ausgeführt, wenn ein vollständig beschriebener fundamentaler Kreis gegeben ist. Hieraus kann man den Beweis des wichtigen Satzes (von Poncelet und Steiner) herleiten:

Alle mit dem Lineal und dem Zirkel ausführbaren bestimmten Konstruktionsaufgaben können allein mit dem Lineal ausgeführt werden, wenn auf dem Zeichenblatte ein vollständig beschriebener fundamentaler Kreis zugleich mit seinem Mittelpunkte gegeben ist.

Man kann nämlich mit dem Lineal und dem Zirkel die folgenden drei fundamentalen Aufgaben lösen, von denen alle mit den genannten Instrumenten ausführbaren bestimmten Konstruktionsaufgaben abhängen:

1. Es ist der gemeinsame Punkt zweier Geraden (die als Verbindungslinien zweier gegebener Punktepaare angegeben sein können) zu finden.

2. Es sind die gemeinsamen Punkte einer Geraden und eines Kreises (den man als durch seinen Mittelpunkt und einen seiner Punkte angegeben betrachten kann) zu finden.

3. Es sind die gemeinsamen Punkte zweier Kreise zu finden.

Die Aufgabe 1 wird mit dem Lineal gelöst, die Aufgabe 2 mit dem Lineal und dem Zirkel, die Aufgabe 3 allein mit dem Zirkel.

Unser fundamentaler Satz wird daher bewiesen sein, wenn gezeigt ist, daß, wenn auf dem Zeichenblatte ein fundamentaler Kreis mit seinem Mittelpunkte O gegeben ist, „die Aufgabe 2 allein mit dem Lineal gelöst werden kann“ und „die Aufgabe 3 mit Hilfe des Lineals auf die Aufgabe 2 zurückgeführt wird“. Die erste Behauptung bildet den Kernpunkt der Sache; wir wollen sie auf zweifache Art beweisen.

Es sei ein Kreis durch seinen Mittelpunkt M und einen seiner Punkte N gegeben; man will seinen Schnitt mit einer gegebenen Geraden r bestimmen. Wir konstruieren zunächst den Punkt N' des Kreises, der zu N in bezug auf M symmetrisch ist (pg. 79 und 71). Nun nehmen wir auf r irgend einen Punkt P an und projizieren ihn von N aus auf den Kreis um M nach P_1; darauf projizieren wir P_1 von N' aus auf die Gerade r nach P'. Diese Konstruktion wird, wenn man von dem fundamentalen Kreise um O Gebrauch macht, allein mit dem Lineal ausgeführt (pg. 79 und 75, 3), und es ist nicht einmal nötig, P_1 zu bestimmen, sondern es genügt, durch N' die Normale zu NP zu ziehen (pg. 75, 1). Wenn P mit P' zusammenfallen sollte, so hat man einen der Schnittpunkte von r mit dem Kreise um M. Aber dies wird im allgemeinen nicht eintreten. Wenn jedoch P auf r variiert, so wird auch P' auf r variieren, und die beiden Punkte werden projektive Punktreihen beschreiben; in der Tat werden vier Punkte des Kreises von N und N' aus durch Quadrupel von Strahlen projiziert, die gleiche Winkel bilden und daher dieselben Doppelverhältnisse haben. Nun wird man die gesuchten Schnittpunkte erhalten, wenn man auf r die Doppelpunkte der Projektivität konstruiert, in der P und P' sich entsprechen.

Es ist der Mühe wert, noch eine zweite Konstruktion der Schnittpunkte der Geraden r mit dem Kreise um M zu geben, die auch mit dem Lineal und unter Benutzung des fundamentalen Kreises um O ausgeführt wird. Sie gründet sich auf den elementaren Begriff der Homothetie zweier Kreise.

Man ziehe in dem fundamentalen Kreise (Fig. 60) ON' parallel zu MN[1]); die Geraden MO, NN' bestimmen das Zentrum S der

1) Sollte der gegebene Radius MN auf einer Geraden liegen, die durch den Mittelpunkt O des fundamentalen Kreises geht, so muß man durch M einen andern Radius gleich MN konstruieren. Man ziehe durch M irgend eine Ge-

Homothetie der beiden Kreise. Wenn nun H der Schnittpunkt des Durchmessers MN und der Geraden r ist, so wird der dazu homologe Punkt H' der Schnittpunkt von HS mit ON' sein, und die durch H' parallel zu r gezogene Gerade wird homolog zu r sein.

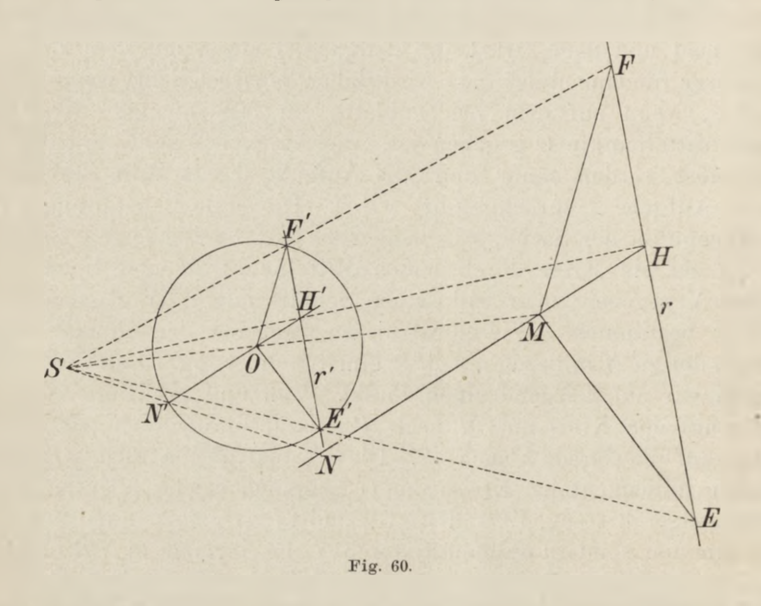


Fig. 60.

Auf r' sind E', F' die Schnittpunkte mit dem fundamentalen Kreise. Verbindet man jetzt das Zentrum S der Homothetie mit E' und F', so wird man auf r die beiden Punkte E und F erhalten, die die verlangten Schnittpunkte mit dem Kreise um M sind. Man bemerkt in der Tat, daß infolge der Ähnlichkeit der Dreiecke EHM, $E'H'O$ die Proportion besteht:

$$EM : E'O = MH : OH' = MN : ON';$$

daraus folgt

$$EM = MN;$$

und analog würde folgen

$$FM = MN.$$

Wenn die Gerade r' den fundamentalen Kreis nicht schneiden sollte, so würde das heißen, daß die Gerade r den Kreis um M nicht schneidet.

---

rade, fälle auf sie die Normale NA und trage auf dieser eine Strecke AK gleich NA ab. Der Radius MK wird gleich MN sein und nicht mehr mit O in einer Geraden liegen.

Wir gehen nun zu der Aufgabe 3 über und wollen zeigen, daß ihre Lösung von der Lösung der Aufgabe 2 abhängig gemacht werden kann. Hierzu werden wir leicht gelangen, indem wir von dem Begriffe des Radikalzentrums (des Punktes gleicher Potenzen, des Chordalpunktes) dreier Kreise Gebrauch machen, und wir wollen diesen Begriff kurz ins Gedächtnis zurückrufen.

Wenn P ein Punkt in der Ebene eines Kreises um O vom Radius r und PMM' eine Sekante dieses Kreises ist, so ist das Produkt

$$\overline{PM} \cdot \overline{PM'} = \overline{PO}^2 - r^2$$

konstant, wie man auch die Sekante durch P legt, und es heißt die Potenz des Punktes P in bezug auf den Kreis um O.

Wenn O und O' die Mittelpunkte zweier Kreise von den Radien r und r' sind (Fig. 61), so ist der Punkt P ein Punkt gleicher Potenzen in bezug auf beide Kreise, wenn

$$\overline{PO}^2 - r^2 = \overline{PO'}^2 - r'^2$$

oder

$$\overline{PO}^2 - \overline{PO'}^2 = r^2 - r'^2.$$

Man bemerkt nun, daß, wenn Q der Fußpunkt der von P auf die Zentrale OO' gefällten Normalen ist, jeder andere Punkt P_1 dieser Normalen immer dann ein Punkt gleicher Potenzen ist, wenn P ein solcher Punkt ist; denn es ist in der Tat:

$$\overline{P_1O}^2 - \overline{P_1O'}^2 = \overline{QO}^2 - \overline{QO'}^2 = \overline{PO}^2 - \overline{PO'}^2.$$

Die (zur Zentrale OO' senkrechte) Gerade PP_1 ist also der Ort der Punkte gleicher Potenzen in bezug auf beide Kreise und heißt ihre Radikalachse (Potenzlinie, Chordale). Wenn zwei Kreise sich schneiden, so ist die gemeinsame Sehne die Radikalachse.

Sind endlich drei Kreise um O, O', O'' gegeben, so existiert in ihrer Ebene im allgemeinen ein einziger Punkt gleicher Potenzen in bezug auf alle drei Kreise, und das ist derjenige Punkt, in welchem sich die Radikalachsen der Kreise um O, O' und der Kreise um O', O'' (und daher auch die Radikalachse der Kreise um O, O'') schneiden. Dieser Punkt heißt das Radikalzentrum (der Punkt gleicher Potenzen, der Chordalpunkt) der drei Kreise; wenn er durch die Radikalachsen der Kreise um O, O' und der Kreise um O', O'' bestimmt ist, so kann er selbst dazu dienen, die Radikalachse der Kreise um O, O'' zu konstruieren; in der Tat ist diese Achse die vom Radikalzentrum auf die Zentrale OO'' gefällte Normale.

Nun haben wir folgenden Satz:

Die Konstruktion der Radikalachse zweier Kreise um O

und O' läßt sich allein mit dem Lineal ausführen, wenn einer der beiden Kreise ganz beschrieben ist.

Es sei nämlich der Kreis um O ganz beschrieben, und der andere Kreis sei durch seinen Mittelpunkt O' und den Radius $O'M'$ gegeben (Fig. 61). Der zu $O'M'$ parallel gezogene Radius OM wird zur

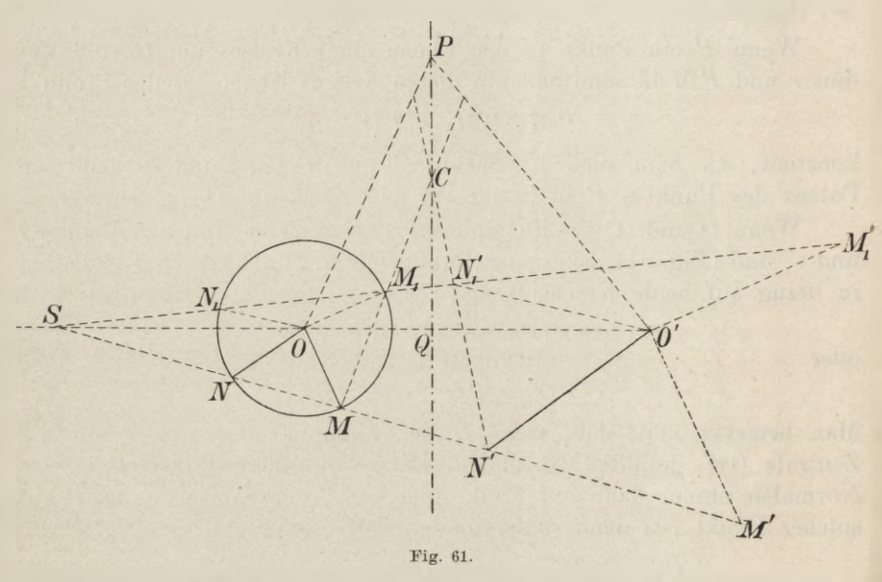


Fig. 61.

Bestimmung des Zentrums S der Homothetie der beiden Kreise dienen. Ist dann p^2 die Potenz des Punktes S in bezug auf den Kreis um O und q^2 die Potenz desselben Punktes in bezug auf den Kreis um O', dann ist

$$SM \cdot SN = p^2, \quad SM' \cdot SN' = q^2$$

und daher

$$SM \cdot SN' \cdot SN \cdot SM' = p^2 q^2.$$

Andrerseits folgt aus der Proportion

$$SM : SM' = SN : SN':$$

$$SM \cdot SN' = SN \cdot SM',$$

und daher ist

$$SN \cdot SM' = pq.$$

Eine andere Transversale $SN_1M_1N_1'M_1'$ würde analog ergeben

$$SN_1 \cdot SM_1' = pq.$$

Und daraus sieht man, daß die vier Punkte N, M', N_1, M_1' auf einem Kreise (um O'') liegen, und entsprechend die vier Punkte M, N', M_1, N_1'

auf einem Kreise (um O'''). Der gemeinsame Punkt der beiden Geraden MM_1, $N'N_1'$ ist also das Radikalzentrum C der Kreise um O, O', O''' und befindet sich daher auf der verlangten Radikalachse. Diese wird also die von C auf die Gerade OO' gefällte Normale sein. Man wird sie auch erhalten, wenn man das (in der Figur nicht angegebene) Radikalzentrum C' der drei analogen Kreise um O, O', O'' sucht und dann C mit C' verbindet.

Nun nehmen wir unsere Aufgabe, „die Schnittpunkte zweier Kreise, deren Mittelpunkte und Radien gegeben sind, zu bestimmen", wieder auf.

Es sei der Kreis um O der fundamentale Kreis, und man will die Schnittpunkte der beiden Kreise, deren Mittelpunkte O', O'' und deren Radien $O'M'$, $O''M''$ sind, bestimmen.

Man wird mit Hilfe der soeben auseinandergesetzten Konstruktion die Radikalachse r'' der Kreise um O, O' und die Radikalachse r' der Kreise um O, O'' bestimmen müssen. Der Punkt (r', r'') wird das Radikalzentrum der drei Kreise sein, und wenn man von ihm aus die Normale auf die Gerade $O'O''$ fällt, so wird man die Radikalachse r der beiden Kreise um O', O'' erhalten.

Die Aufgabe wird also auf die Bestimmung der Schnittpunkte der Geraden r mit dem Kreise um O' (oder mit dem Kreise um O'') bei gegebenem vollständig beschriebenem Kreise um O zurückgeführt, und dies ist die vorher gelöste Aufgabe.

Wir schließen daher, wie wir angekündigt haben, „daß alle mit dem Lineal und dem Zirkel ausführbaren Operationen zur Bestimmung der Schnittpunkte von Geraden und Kreisen (abgesehen nämlich von dem Beschreiben von Kreisen) allein mit dem Lineal ausgeführt werden können, wofern auf dem Zeichenblatte ein vollständig beschriebener Kreis mit seinem Mittelpunkte gegeben ist".

In besonderen Fällen lassen sich die allgemeinen Konstruktionen, in denen man die Anwendung des Zirkels durch den festen Kreis ersetzen kann, vereinfachen. Sehen wir z. B. zu, wie man die drei folgenden Aufgaben direkt mit Hilfe des fundamentalen Kreises lösen kann.

1. Es ist eine Gerade und auf ihr ein Punkt gegeben; man soll einen zweiten Punkt der Geraden bestimmen, der von dem ersten um eine gegebene Länge entfernt ist. Es sei P (Fig. 62) der Punkt auf der Geraden r und AB die Strecke von gegebener Länge. Man verbinde dann z. B. A mit P, ziehe durch P eine Parallele zu AB und durch B eine Parallele zu AP. Die Strecke PD wird gleich und parallel AB sein. In dem fundamentalen Kreise konstruiere man nun den Durchmesser MOM' parallel zu PD und den Durchmesser NON' parallel zu r. Ist dann S der gemeinsame

Punkt von PO und DM', so werden die Geraden SN, SN' die Gerade r in zwei Punkten E und F treffen, die der Aufgabe entsprechen:

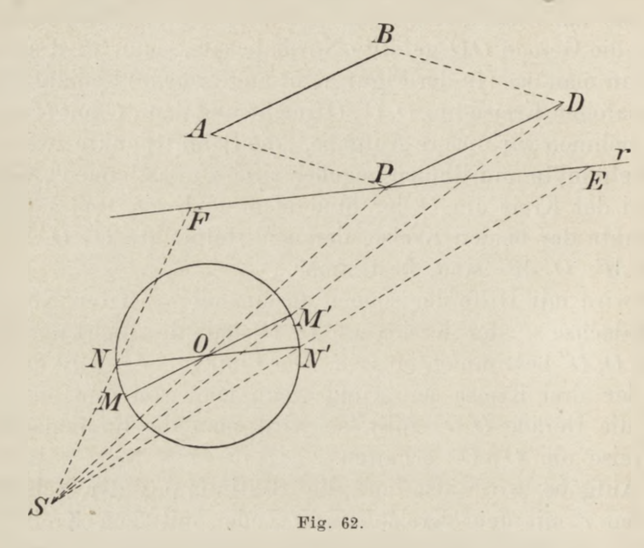


Fig. 62.

denn jede der Strecken PE, PF verhält sich zum Radius des fundamentalen Kreises wie PS zu OS, und also wie PD zum Radius.

2. Es ist ein Punkt und durch ihn eine Gerade gegeben; man soll eine zweite Gerade durch diesen Punkt bestimmen, die mit der ersten einen Winkel gleich einem gegebenen Winkel bildet. Es sei r (Fig. 63) die gegebene Gerade durch den Punkt P und ABC der gegebene Winkel. In dem fundamentalen Kreise konstruiere man die beiden Radien ON, OM parallel zu den Geraden BA, BC und den Radius OH parallel zu r. Dann ziehe man die Sehne ME parallel zu NH und die Sehne NF parallel zu MH. Die beiden Radien OE, OF bilden mit OH zwei Winkel gleich NOM, und daher entsprechen die durch P parallel zu diesen Radien gezogenen Geraden der Aufgabe.

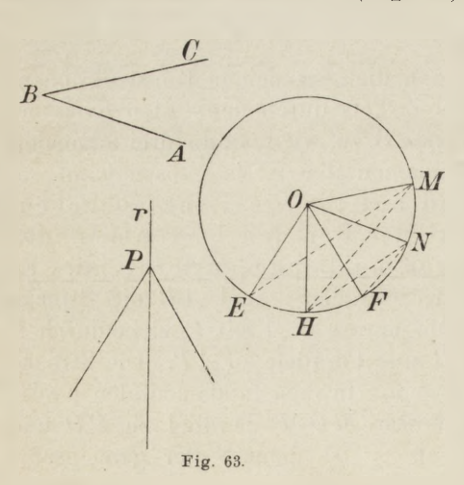


Fig. 63.

3. Es sind zwei sich schneidende Gerade gegeben; man soll die Halbierungslinien ihrer Winkel bestimmen. In dem fundamentalen Kreise ziehe man die zu den gegebenen Geraden parallelen Durchmesser und verbinde deren Endpunkte. Diese Verbindungslinien sind den verlangten Winkelhalbierungslinien parallel.

§ 12. Konstruktionen mit dem Lineal mit zwei parallelen Kanten; erste Art der Benutzung des Instruments. Ein Instrument, das für sich allein das Lineal und den Zirkel zu ersetzen vermag und mit dem man daher die bestimmten Konstruktionsaufgaben ersten und zweiten Grades und diejenigen, die sich auf den zweiten Grad zurückführen lassen, lösen kann, ist das Lineal mit zwei parallelen Kanten. Mit ihm kann man beliebig viele Paare paralleler Linien, die um eine Länge λ gleich der Breite des Lineals voneinander entfernt sind, ziehen, und es kann, abgesehen von seiner Benutzung als einfaches Lineal, in zweifacher Art angewandt werden, um die folgenden beiden fundamentalen Konstruktionen auszuführen:

a) Sind zwei Punkte A, B gegeben, so kann man das Lineal auf das Zeichenblatt in der Weise legen, daß eine Kante durch die Punkte A, B geht; dann kann man mit der andern Kante zu der Geraden AB jede der beiden Parallelen in der Entfernung λ ziehen.

b) Sind zwei Punkte A, B gegeben (deren Entfernung nicht kleiner als λ ist), so kann man das Lineal auf das Zeichenblatt in der Weise legen, daß eine der beiden Kanten durch A, die andere durch B geht; dann kann man in zweifacher Weise zwei Parallelen in der Entfernung λ ziehen, von denen die eine durch A, die andere durch B geht.

Mit Hilfe der Konstruktion a) kann man auf dem Zeichenblatte offenbar beliebig viele Rhomben konstruieren, also beliebig viele Paare paralleler Linien und beliebig viele Paare orthogonaler Richtungen (die Diagonalen der Rhomben). Das Lineal mit zwei Kanten liefert daher für sich, allein durch die Konstruktion a), die fundamentalen metrischen Daten (pg. 76 und 78), und man kann daher mit ihm alle diejenigen deskriptiven und metrischen Aufgaben (ersten Grades) lösen, die man mit dem einfachen Lineal löst, wenn auf dem Zeichenblatte die genannten metrischen Daten vorhanden sind. Aber es läßt sich mit ihm noch eine ganze Klasse von Aufgaben (zweiten Grades) lösen, deren Lösung man mit dem einfachen Lineal nicht erhalten könnte, welche geradlinige Figur auch noch auf dem Blatte gegeben sein mag.

In der Tat kann man durch die Konstruktion a)

die Halbierungslinien der Winkel zweier gegebener Geraden bestimmen.

Man braucht nur mit dem Lineal mit zwei Kanten die Geraden zu bestimmen, die von den gegebenen Geraden um die Länge λ entfernt sind, und die Diagonalen der so konstruierten Rhomben zu ziehen.

Daraus ergibt sich sofort die Lösung der Aufgabe:

Es ist eine gegebene Strecke von einer gegebenen Geraden auf eine andere zu übertragen.

In der Tat, wenn die beiden Geraden nicht parallel sind, so braucht man nur durch die Endpunkte der Strecke die Parallelen zu einer der Halbierungslinien der von den beiden Geraden gebildeten Winkel zu ziehen.

Es geht aus diesen Konstruktionen hervor, daß man mit dem auf die erste Art angewandten Lineal mit zwei parallelen Kanten alle Aufgaben lösen kann, die mit Hilfe eines Streckenübertragers[1]) lösbar sind (vgl. Art. IV). Diese von D. Hilbert bestimmte Klasse von Aufgaben gehört zu der Klasse der Aufgaben zweiten Grades, enthält aber diese nicht sämtlich.

Wir führen einige einfache Konstruktionen mit dem Lineal mit zwei Kanten bei der ersten Benutzungsart hier kurz als Beispiele an[2]):

1. Es ist eine Gerade a und irgend ein Punkt A außerhalb gegeben; man soll durch A eine Parallele zu a ziehen. Man nehme auf a einen Punkt B an und konstruiere auf derselben Seite von AB zwei aufeinanderfolgende Streifen; dann ergibt sich leicht der Schnittpunkt der Diagonalen des von a und den beiden äußeren Parallelen gebildeten Parallelogramms (mit dem Eckpunkte A) und daher der vierte Eckpunkt dieses Parallelogramms.

2. Es ist eine Strecke AB parallel mit sich selbst zu verschieben, wobei A in einen Punkt A' fallen soll. Man ziehe durch A' die Parallele zu AB und konstruiere auf jeder Seite von $A'B$ einen Streifen; jede der beiden Diagonalen des so entstandenen großen Parallelogramms bestimmt die Mitte H von $A'B$, usw.

---

1) Umgekehrt, wenn man ein Instrument besitzt, mit dem man die Strecken (oder auch nur eine Strecke von gegebener Länge λ) von einer Geraden auf eine andere übertragen kann, so kann man mit dem einfachen Lineal eine Parallele zu einer gegebenen Geraden in einer gegebenen Entfernung λ ziehen (Anwendung a). In der Tat kann man mit dem Streckenübertrager vor allem beliebig viele Rechtecke konstruieren, indem man auf den Schenkeln eines Winkels nach beiden Seiten vom Scheitel aus zwei Paare von sämtlich untereinander gleichen Strecken abträgt. Ist dann eine Gerade r gegeben, so kann man mit dem Lineal eine Normale zu ihr ziehen (pg. 75, 1), auf dieser vom Fußpunkt aus die Strecke λ abtragen und dann durch deren Endpunkt die Parallele zu r in der Entfernung λ ziehen.

2) Vgl. C. Marenghi e H. Coucina (*Bolletino di Matematica di* A. Conti, Bologna 1901, Numm. 5, 8).

3. Es ist ein Winkel parallel mit sich selbst zu verschieben, wobei der Scheitel in einen vorgeschriebenen Punkt fallen soll.

4. Es ist ein Winkel um seinen Scheitel zu drehen, wobei einer seiner Schenkel mit einem vorgeschriebenen durch den Scheitel gehenden Strahle zusammenfallen soll. Wenn der Winkel BAC so um A gedreht werden soll, daß AC mit AD zusammenfällt, so konstruiere man die Halbierungslinien des Winkels BAD und seines Nebenwinkels und ziehe zu ihnen durch C Parallele, die die Halbierungslinien in E und F schneiden mögen. Die durch A zu EF gezogene Parallele ist der gesuchte Schenkel.

5. Es ist von einem Punkte A aus die Normale zu einer Geraden a zu ziehen. Es sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem A der Geraden angehört oder nicht. Im ersten Falle konstruiere man auf derselben Seite von a zwei gleichliegende kongruente Rhomben, von denen eine Seite in a und ein Eckpunkt in A liegt, betrachte deren von A ausgehende Diagonalen und wende die vorhergehende Aufgabe an. Im zweiten Falle konstruiere man durch A die Parallele zu a und verfahre wie vorher.

§ 13. Das Lineal mit zwei Kanten als Ersatz des Zirkels. Sehen wir nun zu, was man mit dem Lineal mit zwei Kanten erreichen kann, wenn man es auch auf die zweite Art, nämlich zur zur Ausführung der Konstruktion b) (pg. 95), anwendet. Wir behaupten, daß dann unser Instrument bei der Lösung der bestimmten Aufgaben den Zirkel vollständig ersetzen kann.

Dazu ist nur zu zeigen (§ 11), wie man mit diesem Instrumente die Schnittpunkte einer Geraden mit einem fundamentalen Kreise bestimmen kann, auch wenn dieser Kreis nicht wirklich beschrieben ist.

Wir nehmen als fundamentalen Kreis denjenigen Kreis an, der irgend einen Punkt O des Blattes zum Mittelpunkte und die Breite λ des Lineals mit zwei Kanten zum Radius hat; wir werden dann immer mit diesem Lineale beliebig viele Tangenten an den Kreis ziehen können, und wenn im besondern P ein Punkt außerhalb des Kreises ist, so werden wir, wenn wir (auf beide Arten) eine Kante des Lineals an O anlegen und eine an P, die beiden durch P gehenden Tangenten an den Kreis ziehen können. Dieser (nicht gezogene) fundamentale Kreis möge γ heißen. Wir wollen also zeigen, wie man die Schnittpunkte einer Geraden mit diesem Kreise γ immer bestimmen kann, wenn man das Lineal mit zwei Kanten benutzt. Damit wird dann bewiesen sein, daß alle bestimmten Aufgaben, die mit dem Lineal und

dem Zirkel lösbar sind, allein mit Hilfe des Lineals mit zwei Kanten gelöst werden können.

Es sei O der Mittelpunkt von γ und r die gegebene Gerade (Fig. 64). Von dem Punkte O aus fälle man die Normale OA auf r; dann besteht die gestellte Aufgabe darin, auf OA einen Punkt von der Art zu suchen, daß die von ihm aus an den Kreis gezogenen Tangenten ihren Berührungspunkt auf r haben.

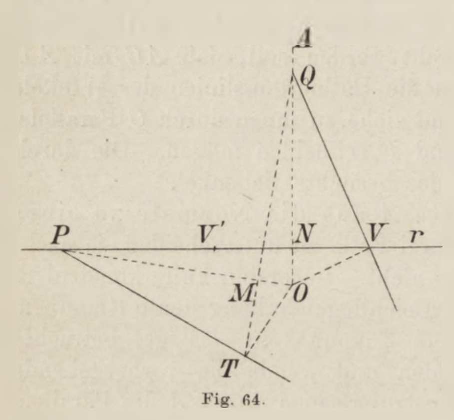


Fig. 64.

Man wähle auf r irgend einen Punkt P (in genügender Entfernung von O), ziehe von ihm aus eine Tangente an den Kreis γ und bestimme auf dieser den Berührungspunkt T. Die von T aus auf PO gefällte Normale wird die Gerade OA in einem Punkte Q treffen, der der gesuchte Punkt ist. In der Tat, bezeichnen wir mit M den Punkt, in dem sich PO und TQ schneiden, und mit N den Punkt, in dem sich r und OA schneiden, so liegen die Punkte P, Q, M, N auf einem Kreise, und daher ist

$$OM \cdot OP = ON \cdot OQ;$$

das heißt; die mittlere Proportionale zu OM und OP (nämlich der Radius OT) ist gleich der mittleren Proportionale zu ON und OQ. Konstruiert man also das rechtwinklige Dreieck, dessen Hypotenuse OQ ist und dessen der Hypotenuse gegenüberliegender Eckpunkt V sich auf der Geraden r befindet, so wird seine Kathete OV gleich OT sein und seine andere Kathete QV wird die Tangente an den Kreis γ im Punkte V darstellen. Wenn man also von Q aus eine Tangente an den Kreis γ zieht, so ist ihr Berührungspunkt ihr Schnittpunkt mit r.

Es ist jedoch die Bemerkung nicht überflüssig, daß man bei der Bestimmung der Schnittpunkte eines durch seinen Mittelpunkt und seinen Radius gegebenen Kreises mit einer Geraden den fundamentalen Kreis γ nicht nötig hat, wenn man das Lineal mit zwei Kanten benutzt.

Wir wollen in der Tat eine Lösung der Aufgabe „die Schnittpunkte einer gegebenen Geraden mit einem Kreise von gegebenem Mittelpunkte und gegebenem Radius zu bestimmen" angeben, bei der von dem Kreise γ kein Gebrauch gemacht wird.[1])

1) Vgl. Adler l. c.

Es sei M der Mittelpunkt des gegebenen Kreises (Fig. 65) und a die gegebene Gerade. Wenn der (von M ausgehende) gegebene Radius nicht zu a parallel ist, so muß man ihn parallel zu dieser Geraden, nach MN, legen (dies wird man leicht erreichen, wenn man den von dem Radius mit der Richtung MN gebildeten Winkel halbiert und von dem Endpunkte des Radius die Normale auf die Halbierungslinie fällt). Die Entfernung d der Geraden a von dem Mittelpunkte M wird im allgemeinen der Breite λ des Lineals mit zwei Kanten nicht gleich sein; man ziehe daher die Gerade a' in der Entfernung λ von M parallel zu a und suche die Schnittpunkte von a' mit dem Kreise (vom Mittelpunkte M), dessen Radius der Proportion

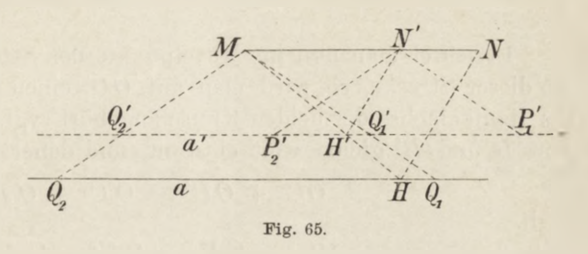


Fig. 65.

$$x : MN = \lambda : d$$

genügt.

Diesen Radius $x = MN'$ findet man leicht mit Hilfe irgend einer Transversale MH und der ähnlichen Dreiecke $MH'N'$, MHN. Man lege also auf beide Arten das Zweikantenlineal mit einer Kante an M und mit der andern an N', so wird man die beiden Rhomben $MQ_1'P_1'N'$, $MQ_2'P_2'N'$ erhalten, und die Punkte Q_1', Q_2' werden die Schnittpunkte von a' mit dem Kreise vom Radius MN' sein.

Dann werden die Strahlen MQ_1', MQ_2' auf der Geraden a die Punkte Q_1, Q_2 ergeben, die offenbar dem Kreise vom Radius MN angehören.

Auch kann man die andere fundamentale Aufgabe, „die Schnittpunkte zweier gegebener Kreise zu bestimmen", mit Hilfe des Zweikantenlineals auf die vorhergehende zurückführen, ohne sich des Kreises γ zu bedienen. Es seien in der Tat OM, $O'M'$ die beiden gegebenen Radien, die wir senkrecht zu OO' nach OA, $O'A'$ legen wollen (Fig. 66); dazu ist nur der Winkel MOA zu halbieren und die Normale von M aus auf die Halbierungslinie zu fällen usw.

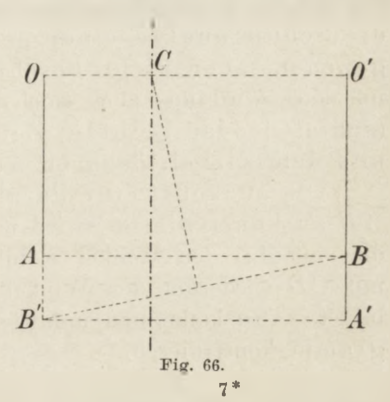


Fig. 66.

Es mögen dann die Geraden AB, $A'B'$ parallel zu OO' gezogen werden, so daß

$$O'B = OM, \quad OB' = O'M'$$

ist.

Errichtet man nun im Mittelpunkte der Strecke BB' die Normale zu dieser Strecke, so wird man auf OO' einen Punkt C erhalten, der der Radikalachse der beiden Kreise angehört (vgl. § 11); in der Tat ist er von B und B' gleich weit entfernt, und daher besteht die Gleichung:

$$\overline{OC}^2 + \overline{OB'}^2 = \overline{O'C}^2 + \overline{O'B}^2,$$

d. h.

$$\overline{OC}^2 - \overline{OM}^2 = \overline{O'C}^2 - \overline{O'M'}^2.$$

Konstruiert man also in C die Normale zu OO', so erhält man die Radikalachse der beiden Kreise.

§ 14. Konstruktionen mit dem rechten oder dem schiefen Zeichenwinkel. Wir wollen schließlich zusehen, wie man alle elementar lösbaren Aufgaben lösen kann, indem man sich des rechten oder des schiefen Zeichenwinkels bedient.

Unter einem Zeichenwinkel ist ein aus Holz, Metall, Hartgummi, Celluloid o. dgl. hergestellter Winkel von gegebener Größe σ zu verstehen, von der Art wie er, gewöhnlich als Teil eines „Dreiecks", beim Zeichnen benutzt wird. Ist $\sigma = 90^0$, so nennen wir ihn einen rechten, andernfalls einen schiefen Zeichenwinkel.

Der (schiefe oder rechte) Zeichenwinkel kann vor allem wie ein einfaches Lineal gebraucht werden. Aber er liefert uns auch, wie wir erkennen werden, auf dem Zeichenblatte die fundamentalen metrischen Daten (pg. 76 und 78), und man kann daher mit seiner Hilfe alle Aufgaben (ersten Grades) lösen, die sich auf Grund dieser Daten mit dem Lineal lösen lassen. Außerdem werden wir sehen, wie man mit dem (schiefen oder rechten) Zeichenwinkel die Schnittpunkte einer gegebenen Geraden mit einem gegebenen, aber nicht beschriebenen Kreise bestimmen kann, und dies wird uns auch noch schließen lassen, daß man mit dem (schiefen oder rechten) Zeichenwinkel alle mit dem Lineal und dem Zirkel lösbaren Aufgaben lösen kann.

Um zunächst eine Parallele zu einer gegebenen Geraden AB zu konstruieren, wird man eine Gerade CD zu ziehen haben, die mit AB den Winkel σ bildet, und dann eine Gerade EF, die mit CD wiederum den Winkel σ, als Wechselwinkel zu dem ersten, bildet. Also kann man unmittelbar ein fundamentales Parallelogramm konstruieren.

Um ferner eine Normale zu einer gegebenen Geraden AB zu konstruieren, nehme man auf AB zwei beliebige Punkte M, N an und konstruiere über der Strecke MN als Basis auf beiden Seiten von AB das gleichschenklige Dreieck vom Basiswinkel σ. Dann wird die Verbindungslinie der Spitzen dieser Dreiecke auf AB normal stehen. Und man kann also beliebig viele Paare orthogonaler Geraden konstruieren.

Wenn $\sigma = 90^0$ ist, so wird diese letzte Konstruktion unnötig (und wertlos).

Die Bestimmung der Schnittpunkte einer gegebenen Geraden mit einem Kreise von gegebenem Mittelpunkte und gegebenem Radius wird unmittelbar in folgender Weise erhalten.

Wenn OM der gegebene Radius (Fig. 67) und O der gegebene Mittelpunkt ist, so konstruiere man mit Hilfe des Zeichenwinkels σ einen Rhombus von der Seite OM. Dann ist in dem durch seinen Mittelpunkt und seinen Radius gegebenen Kreise der Winkel MON Zentriwinkel und jeder mit MON auf derselben Seite von MN liegende Peripheriewinkel über der Sehne MN gleich σ. Daraus ergibt sich sofort die Lösung unserer Aufgabe. Man hat nur den Scheitel des Zeichenwinkels σ in der Weise, daß eine seiner Kanten z. B. durch N geht, auf r so lange zu verschieben, bis die andere Kante durch M geht, usw. Übrigens kann man, wenn der Radius OM unbequem liegt, an den zuerst konstruierten Rhombus andere kongruente Rhomben anreihen und von diesen aus die obige Konstruktion ausführen. Wenn $\sigma = 90^0$ ist, so kann man den Rhombus nicht konstruieren; in diesem Falle ist durch bekannte lineale Konstruktionen der Punkt M' zu konstruieren, der dem Punkte M diametral gegenüberliegt, und der Scheitel des rechten Winkels in der Weise, daß eine seiner Kanten durch M geht, auf r so lange zu verschieben, bis die andere Kante durch M' geht.

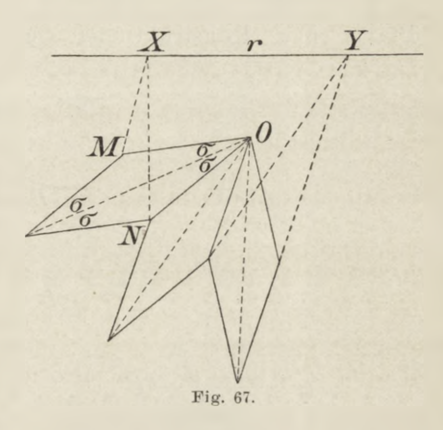


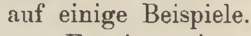
Fig. 67.

Die Aufgabe „die Schnittpunkte zweier Kreise zu bestimmen, deren Mittelpunkte und Radien gegeben sind" wird auf die im § 13 angegebene Weise oder auch durch folgende Konstruktion auf die vorstehende zurückgeführt:

Es seien OM, $O'M'$ die gegebenen Radien der Kreise um O, O'.

Wenn sie nicht bereits parallel sind, so konstruiere man — indem man zunächst durch O' eine Parallele zu OM zieht und dann auf dieser nach vorstehender Konstruktion mit Hilfe eines Rhombus von der Seite $O'M'$ den Schnittpunkt mit dem Kreise (O', $O'M'$) bestimmt — durch O' einen Radius gleich $O'M'$ und parallel zu OM. Diese beiden parallelen Radien genügen zur Bestimmung des Zentrums der Homothetie S auf OO', und durch dieses Zentrum ziehe man noch eine Transversale SN. Die Schnittpunkte dieser beiden Transversalen mit den gegebenen Kreisen werden auch nach vorstehender Konstruktion gefunden und dienen dazu, allein mit dem Lineal die Radikalachse der beiden Kreise zu konstruieren (vgl. § 11).

Mit Hilfe des schiefen Zeichenwinkels lassen sich endlich in der Praxis einige Konstruktionen vereinfachen. Wir beschränken uns hier auf einige Beispiele.



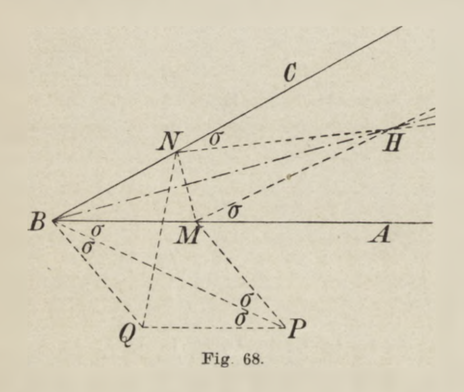


Fig. 68.

Es ist ein gegebener Winkel ABC zu halbieren. Wir nehmen auf BA (Fig. 68) irgend einen Punkt M an und bestimmen auf der Seite BC mit Hilfe eines über BM mit dem Zeichenwinkel σ konstruierten Rhombus $BQPM$ einen Punkt N so, daß BN gleich BM ist. Nun legen wir den Zeichenwinkel an MA und NC an und zeichnen die Winkel AMH und HNC; die Gerade BH wird die verlangte Halbierungslinie sein.

Es ist ein gegebener Winkel zu verdoppeln. Es sei ABC (Fig. 69) dieser Winkel. Man nehme auf dem Schenkel BA (oder auf seiner Verlängerung, je nachdem der gegebene Winkel kleiner oder größer als σ ist) einen Punkt M an, lege den Zeichenwinkel an MA an und ziehe MD; dann lege man den Zeichenwinkel um und verschiebe ihn längs BA, bis die andere Kante durch D geht und man also die Grade DE erhält. Vervollständigt man nun das Dreieck MED zu dem Rhombus $MD'ED$, so ist der Winkel $D'BD$ doppelt so groß als der gegebene.

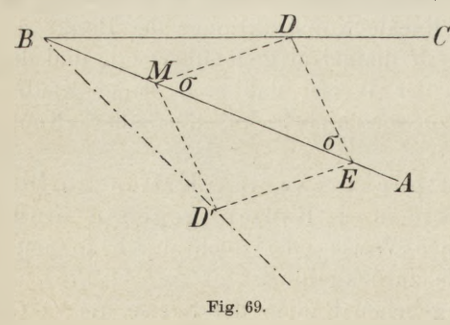


Fig. 69.

Wiederholt man diese Konstruktion mehrere Male, so kann man das n-fache eines gegebenen Winkels konstruieren.

Anmerkung. Wenn man bei dem (rechten oder schiefen) Zeichenwinkel (wie bei dem Lineal mit zwei Kanten) zwei Benutzungsarten unterscheiden will, so liefert die erste und unmittelbarste Art, die in der Übertragung eines Winkels von gegebener Größe besteht, nur die Lösung der metrischen Aufgaben ersten Grades (vgl. § 7), während für die höheren Aufgaben — die Bestimmung der Schnittpunkte eines Kreises und einer Geraden, die Winkelhalbierung usw. — die kompliziertere Benutzungsart nötig ist, die darin besteht, daß man das Instrument gleiten läßt.

bis zu ihnen zurückgelegt hat, und es bleibt ihnen ihre innigere Berührung mit der Form, in der die praktischen Aufgaben gewöhnlich auftreten. Daher wollen wir von dem, was die alten Geometer uns gelehrt haben, nichts beiseite legen und wenden uns an eine breitere und höhere wissenschaftliche Ausbildung nur, um uns die Verhältnisse jener elementaren Geometrie klar zu machen, deren bewunderswerte Einzelheiten sehr wohl dem Glanze der modernen allgemeinen Begriffe entsprechen.

Berichtigungen.

S. 42, Z. 21 v. o. statt anM lies Man
S. 98, Z. 16 v. u. statt ; lies :
S. 112, Z. 3 v. u. und S. 113, Z. 3 v. o. statt $\frac{O}{O}\frac{M}{E}$ lies $\frac{OM}{OE}$
S. 113, Z. 11 v. o. statt $\frac{X'}{O'}\frac{E'}{E'}$ lies $\frac{X'E'}{O'E'}$
S. 117, Z. 15 v. o. statt $\frac{O'}{O'}\frac{M_x}{E_x}$ lies $\frac{OM_x}{OE_x}$
S. 120, Z. 1 v. u. statt Beziehnng lies Beziehung
S. 140, Z. 3 v. o. statt im § 9 lies in den §§ 8—10
S. 181, Z. 5 v. u. statt mit der Abszisse lies von der Abszisse
S. 270, Z. 8 v. u. statt arithmetich lies arithmetisch
S. 308, Z. 14 v. o. statt algebraischen lies algebraischer
S. 319, Z. 11 v. u. statt $\gamma_{n-1}{}^{(n-1)!} + \cdots + \gamma_1{}^{1!}$ lies $\gamma_{n-1}(n-1)! + \cdots + \gamma_1 1!$

